



Hisas Online الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع الأدبي
الفصل الدراسي الأول

12

إجابات كتاب الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 📧 P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor @ feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo



إجابات كتاب الطالب- مادة الرياضيات- الصف الثاني عشر الأدبي ف1

الوحدة الأولى: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

الدرس الأول: الاقترانات الأسية

مسألة اليوم صفحة 8

$$P(t) = 325(0.25)^t$$

$$P(5) = 325(0.25)^5 \approx 0.32$$

أتحقق من فهمي صفحة 9

a

$$f(4) = 3^4$$

$$= 81$$

b

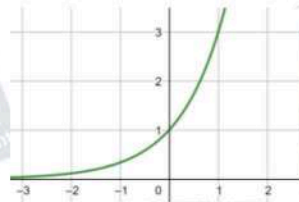
$$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$= 3$$

أتحقق من فهمي صفحة 10

a

$$f(x) = 3^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x

لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x

عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ ، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1

b

c

الاقتران $f(x)$ متزايد

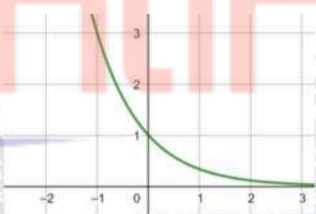
d

الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد



أتحقق من فهمي صفحة 12

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x

لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x

عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ ، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1

الاقتران $f(x)$ متناقص

الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد

أتحقق من فهمي صفحة 15

$$f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -1$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$

الاقتران $f(x)$ متزايد

$$f(x) = 4(5)^{-x} = 4\left(\frac{1}{5}\right)^x$$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 0$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

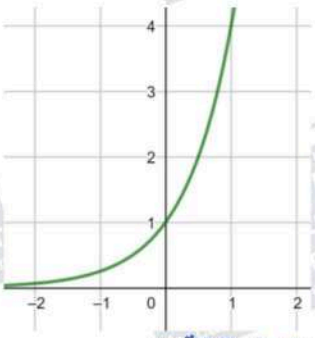
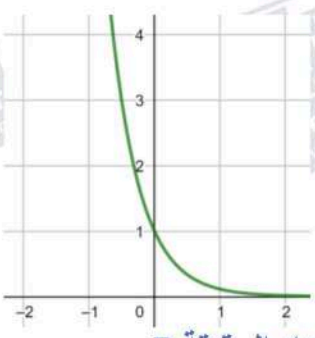
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

الاقتران $f(x)$ متناقص

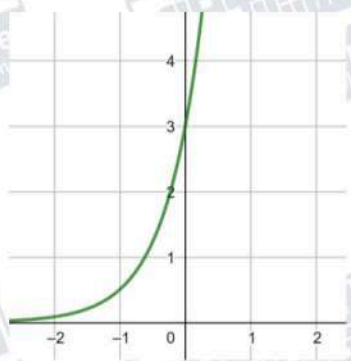


c	$f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-\infty, 2)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
أتحقق من فهمي صفحة 16	
a	$\begin{aligned}f(5) &= 500(2)^5 \\&= 500(32) \\&= 16000\end{aligned}$ عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات هو 16000 خلية
b	$\begin{aligned}4000 &= 500(2)^x \\8 &= (2)^x \\(2)^3 &= (2)^x \\x &= 3\end{aligned}$ بعد 3 ساعات يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية
أتدرب وأحل المسائل صفحة 16	
1	$\begin{aligned}f(3) &= (11)^3 \\&= 1331\end{aligned}$
2	$\begin{aligned}f(1) &= -5(2)^1 \\&= -5(2) \\&= -10\end{aligned}$
3	$\begin{aligned}f(2) &= 3\left(\frac{1}{7}\right)^2 \\&= 3\left(\frac{1}{49}\right) \\&= \frac{3}{49}\end{aligned}$



4	$\begin{aligned}f(4) &= -(5)^4 + 4 \\&= -(625) + 4 \\&= -621\end{aligned}$
5	$\begin{aligned}f(5) &= (3)^5 + 1 \\&= 243 + 1 \\&= 244\end{aligned}$
6	$\begin{aligned}f(2) &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3 \\&= \frac{1}{81} - 3 \\&= \frac{1}{81} - \frac{243}{81} \\&= -\frac{242}{81}\end{aligned}$
7	$f(x) = 4^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
8	$f(x) = 9^{-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$



9	$f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
10	$f(x) = 3(6)^x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
11	$f(x) = 5^{x-1} + 2$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
12	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-5, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص



13	$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-6, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
14	$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
15	$f(0) = 7000(1.2)^0$ $= 7000(1)$ $= 7000$ عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة هو 7000 خلية
16	$f(12) = 7000(1.2)^{12}$ ≈ 62413 عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة هو 62413 خلية تقريباً
17	$10080 = 7000(1.2)^x$ $1.44 = (1.2)^x$ $(1.2)^2 = (1.2)^x$ $x = 2$ بعد ساعتين من بدء التجربة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية
18	$f(1) = 100(0.97)^1$ $= 100(0.97)$ $= 97$ نسبة الضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد هي 97%
19	$f(3) = 100(0.97)^3$ ≈ 91 نسبة الضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%
20	$P(1) = 100(0.3)^1$ $= 100(0.3)$ $= 30$ نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض هي 30%



21	$9 = 100(0.3)^t$ $0.09 = (0.3)^t$ $(0.3)^2 = (0.3)^t$ $t = 2$ بعد سنتين تصبح نسبة المتعافين 9%
22	$f(x) = ab^x$ من التمثيل البياني نلاحظ أن المقطع y هو 1، إذن عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ نعوض $x = 0$ و $y = 1$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $1 = ab^0$ $1 = a \times 1$ $a = 1$ نلاحظ أيضًا أن النقطة $(1, \frac{1}{4})$ تقع على منحنى الاقتران، نعوض $x = 1$ و $y = \frac{1}{4}$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $\frac{1}{4} = ab^1$ $\frac{1}{4} = (1)b^1$ $b = \frac{1}{4}$ ومنه فإن قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
23	الاقتران المختلف هو $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ لأنه الاقتران الوحيد المتناقص والاقترانات الأخرى متزايدة.
24	$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x}$ $= \frac{b^{x+1}}{b^x}$ $= b$



الدرس الثاني: النمو والاضمحلال الأسّي

مسألة اليوم صفحة 18

$$A(t) = a(1 + r)^t = 10.8(1 + 0.026)^t$$

$$t = 2030 - 2020 = 10$$

$$A(10) = 10.8(1 + 0.026)^{10} \approx 13.960$$

العدد التقريبي للسكان عام 2030م هو 13960000 نسمة

أتحقق من فهمي صفحة 19

a

$$A(t) = 327(1 + 0.18)^t$$

$$A(t) = 327(1.18)^t$$

b

$$A(3) = 327(1.18)^3$$

$$\approx 537$$

عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة هو 537 بقرة تقريباً.

أتحقق من فهمي صفحة 21

a

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$$A(t) = 28500(1 - 0.05)^t$$

$$A(t) = 28500(0.95)^t$$

b

$$A(4) = 28500(0.95)^4$$

$$\approx 23213$$

ثمن السيّارة بعد 4 سنوات هو 23213 ديناراً تقريباً

أتحقق من فهمي صفحة 22

$$\begin{aligned} A &= P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} \\ &= 5000 \left(1 + \frac{0.0225}{2} \right)^{2 \times 5} \\ &\approx 5591.85 \end{aligned}$$

جملة المبلغ بعد 3 سنوات: JD 5591.85 تقريباً.



أتحقق من فهمي صفحة 23

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ &= 6300e^{0.032 \times 9} \\ &\approx 8402.67 \end{aligned}$$

جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 8402.67 تقريباً.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 24

1

$$\begin{aligned} A(t) &= a(1 + r)^t \\ A(t) &= 150(1 + 0.08)^t \\ A(t) &= 150(1.08)^t \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} A(5) &= 150(1.08)^5 \\ &\approx 220 \end{aligned}$$

عدد المشاركين بعد 5 سنوات 220 تقريباً.

3

$$\begin{aligned} A(t) &= a(1 + r)^t \\ A(t) &= 50000(1 + 0.15)^t \\ A(t) &= 50000(1.15)^t \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} t &= 2025 - 2019 = 6 \\ A(6) &= 50000(1.15)^6 \\ &\approx 115653 \end{aligned}$$

عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م: 115653 تقريباً.

5

$$\begin{aligned} A(t) &= a(1 - r)^t \\ A(t) &= 17350(1 - 0.035)^t \\ A(t) &= 17350(0.965)^t \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} A(3) &= 17350(0.965)^3 \\ &\approx 15591.27 \end{aligned}$$

ثمن السيارة بعد 3 سنوات: JD15591.27 تقريباً.

7

$$\begin{aligned} A(t) &= a(1 - r)^t \\ A(t) &= 15275(1 - 0.27)^t \\ A(t) &= 15275(0.73)^t \end{aligned}$$



8	$A(7) = 15275(0.73)^7$ ≈ 1687 عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 ساعات: 1687 خلية تقريباً.
9	$A(t) = a(1 - r)^t$ $A(5) = 1550(1 - 0.25)^5$ $= 1550(0.75)^5$ ≈ 368 العدد المتبقي من الدجاج بعد 5 أيام من المرض: 368 دجاجة تقريباً.
10	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 1200 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{12t}$
11	$A = 1200 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{12 \times 5}$ ≈ 1974.37 جملة المبلغ بعد 5 سنوات: JD 1974.37 تقريباً.
12	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 6200 \left(1 + \frac{0.084}{365}\right)^{365t}$
13	$A = 6200 \left(1 + \frac{0.084}{365}\right)^{365 \times 6}$ ≈ 10262.45 جملة المبلغ بعد 6 سنوات: JD 10262.45 تقريباً.
14	$A = Pe^{rt}$ $= 9000e^{0.036 \times 7}$ ≈ 11579.36 جملة المبلغ بعد 7 سنوات: JD 11579.36 تقريباً.



15	$A = Pe^{rt}$ $= 8200e^{0.049 \times 9}$ ≈ 12744.94 جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 12744.94 تقريبًا.
16	$P(t) = 20e^{0.03t}$ $P(72) = 20e^{0.03 \times 72}$ ≈ 173 عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة: 173 ذبابة تقريبًا.
17	الخطأ الذي ارتكبه رامي هو أنه كتب معدل الفائدة السنوي 1.25 وكان ينبغي كتابته: 0.0125 $A = 250 \left(1 + \frac{0.0125}{4} \right)^{4(3)} \approx 259.54$
18	النسبة المئوية للزيادة 200%، فيكون عامل النمو $1 + \frac{200}{100} = 3$ إذا كان عدد الإصابات في البداية يساوي N، فإن عددها بعد t أسبوعًا هو $A(t) = N(1 + r)^t = N3^t$



الدرس الثالث: الاقترانات اللوغاريتمية

مسألة اليوم صفحة 26

الرمز $\log$ هو اختصار لكلمة logarithm (لوغاريتم) وهو معكوس الاقتران الأسّي. فإذا كان $b^x = a$ فنقول أن لوغاريتم a للأساس b هو x ، وبالرموز نكتب $\log_b a = x$.

أتحقق من فهمي مثال 1 صفحة 27

a	$\log_2 16 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$
b	$\log_7 7 = 1 \rightarrow 7^1 = 7$
c	$\log_3 \left(\frac{1}{243}\right) = -5 \rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$
d	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$

أتحقق من فهمي مثال 2 صفحة 27

a	$7^3 = 343 \rightarrow \log_7 343 = 3$
b	$49^{\frac{1}{2}} = 7 \rightarrow \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
c	$(2)^{-5} = \frac{1}{32} \rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$
d	$17^0 = 1 \rightarrow \log_{17} 1 = 0$

أتحقق من فهمي صفحة 28

a	$\log_5 25 = y$ $5^y = 25$ $5^y = 5^2$ $y = 2$	إن $\log_5 25 = 2$
b	$\log_8 \sqrt{8} = y$ $8^y = \sqrt{8}$ $8^y = 8^{\frac{1}{2}}$ $y = \frac{1}{2}$	إن $\log_8 \sqrt{8} = \frac{1}{2}$

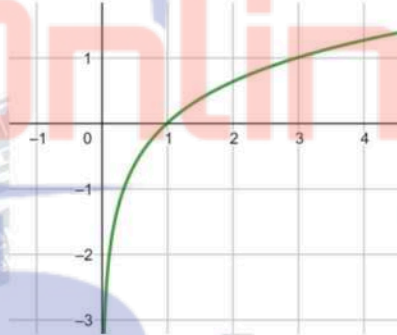


c	$\log_{81} 9 = y$ $81^y = 9$ $9^{2y} = 9^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$	إن $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$
d	$\log_3 \frac{1}{27} = y$ $3^y = \frac{1}{27}$ $3^y = \frac{1}{3^3}$ $3^y = 3^{-3}$ $y = -3$	إن $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
أتحقق من فهمي صفحة 29		
a	$\log_2 1 = 0$	
b	$\log_{32} \sqrt{32} = \log_{32} 32^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}$	
c	$\log_9 9 = 1$	
d	$8^{\log_8 13} = 13$	



أتحقق من فهمي صفحة 31

$f(x) = \log_3 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

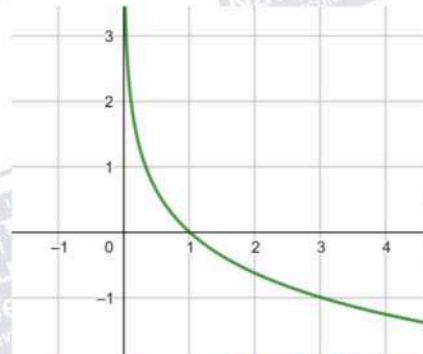
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

أتحقق من فهمي صفحة 33

$f(x) = \log_7(5 - x)$

$5 - x > 0$

$-x > -5$

$x < 5$

مجال الاقتران هو $(-\infty, 5)$

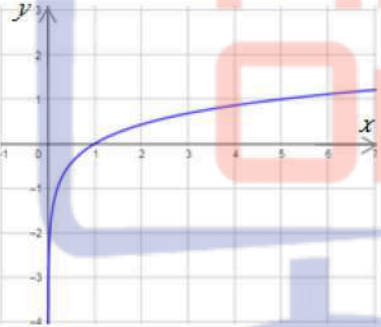
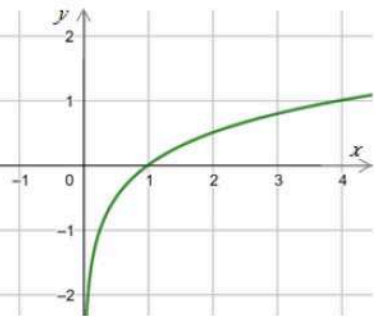
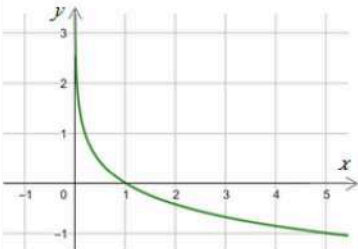
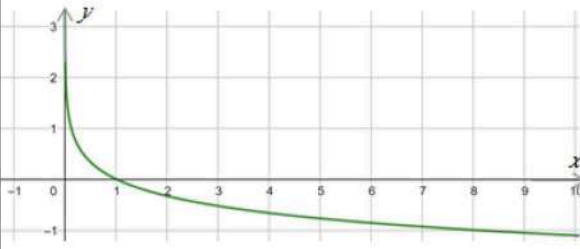


b	$f(x) = \log_5(9 + 3x)$ $9 + 3x > 0$ $3x > -9$ $x > -3$	مجال الاقتران هو $(-3, \infty)$
أُتدرب وأحل المسائل صفحة 33		
1	$\log_7 343 = 3 \rightarrow 7^3 = 343$	
2	$\log_4 256 = 4 \rightarrow 4^4 = 256$	
3	$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$	
4	$\log_{36} 6 = 0.5 \rightarrow 36^{0.5} = 6$	
5	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$	
6	$\log_{57} 57 = 1 \rightarrow 57^1 = 57$	
7	$2^6 = 64 \rightarrow \log_2 64 = 6$	
8	$4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$	
9	$6^3 = 216 \rightarrow \log_6 216 = 3$	
10	$5^{-3} = 0.008 \rightarrow \log_5 0.008 = -3$	
11	$51^1 = 51 \rightarrow \log_{51} 51 = 1$	
12	$9^0 = 1 \rightarrow \log_9 1 = 0$	
13	$\log_3 81 = \log_3 3^4$ $= 4$	
14	$\log_{25} 5 = y$ $25^y = 5$ $5^{2y} = 5^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$	إن $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5$ $= 5$	إن $\log_2 32 = 5$

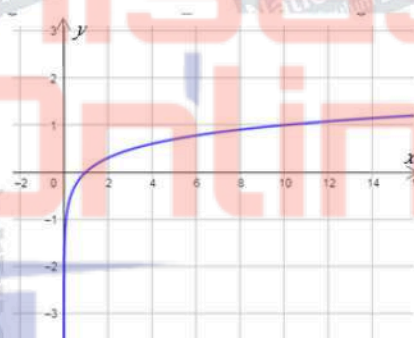
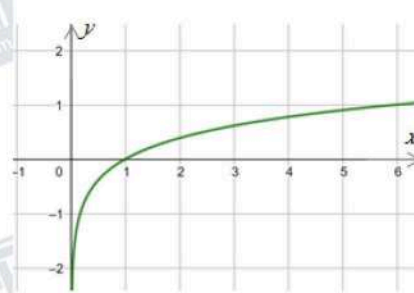


16	$\log_{49} 343 = y$ $49^y = 343$ $7^{2y} = 7^3$ $2y = 3$ $y = \frac{3}{2}$	$\log_{49} 343 = \frac{3}{2}$ إذن
17	$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $= -3$	
18	$\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$	
19	$\log_{\frac{1}{4}} 4 = y$ $\left(\frac{1}{4}\right)^y = 4$ $4^{-y} = 4^1$ $-y = 1$ $y = -1$	$\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$ إذن
20	$(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$	
21	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \log_2 \frac{1}{(2)^{\frac{7}{2}}}$ $= \log_2 (2)^{-\frac{7}{2}}$ $= -\frac{7}{2}$	
22	$\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}}$ $= \frac{1}{5}$	
23	$\log_{10}(1 \times 10^{-9}) = \log_{10} 10^{-9}$ $= -9$	
24	$8^{\log_8 5} = 5$	



25	$f(x) = \log_5 x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
26	$f(x) = \log_4 x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
27	$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص
28	$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص

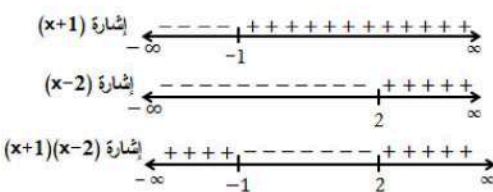


29	$f(x) = \log_{10} x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
30	$f(x) = \log_6 x$ 	مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
31	$f(x) = \log_3(x - 2)$ $x - 2 > 0$ $x > 2$	مجال هذا الاقتران هو $(2, \infty)$
32	$f(x) = 5 - 2 \log_7(x + 1)$ $x + 1 > 0$ $x > -1$	مجال هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$
33	$f(x) = -3 \log_4(-x)$ $-x > 0$ $x < 0$	مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, 0)$

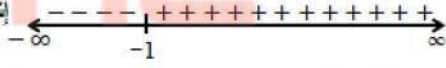
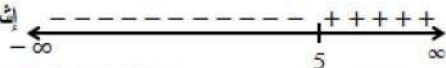


34	$f(x) = \log_a x$ $f(32) = \log_a 32$ $5 = \log_a 32$ $a^5 = 32$ $a^5 = (2)^5$ $a = 2$
35	$f(x) = \log_c x$ $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_c \frac{1}{4}$ $-4 = \log_c \frac{1}{4}$ $c^{-4} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{c^4} = \frac{1}{4}$ $c^4 = 4 \rightarrow c^2 = 2 \rightarrow c = \pm\sqrt{2}$ ولأن أساس اللوغاريتم لا يكون سالبا فإن: $c = \sqrt{2}$
36	$P(a) = 10 + 20 \log_5(a + 1)$ $P(4) = 10 + 20 \log_5(4 + 1)$ $= 10 + 20 \log_5 5$ $= 10 + 20(1)$ $= 30$ $P(24) = 10 + 20 \log_5(24 + 1)$ $= 10 + 20 \log_5 25$ $= 10 + 20 \log_5 5^2$ $= 10 + 20(2)$ $= 50$ $P(124) = 10 + 20 \log_5(124 + 1)$ $= 10 + 20 \log_5 125$ $= 10 + 20 \log_5 5^3$ $= 10 + 20(3)$ $= 70$
37	القيمة $P(4) = 30$ تعني أن إنفاق JD400 على الإعلانات يحقق إيرادا قيمته JD 30000 من بيع المنتج القيمة $P(24) = 50$ تعني أن إنفاق JD 2400 على الإعلانات يحقق إيرادا قيمته JD 50000 من بيع المنتج القيمة $P(124) = 70$ تعني أن إنفاق JD 12400 على الإعلانات يحقق إيرادا قيمته JD 70000 من بيع المنتج



38	$f(x) = \log_3 x$ c لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متزايد ويمر منحناه بالنقطة $(3, 1)$ حيث $f(3) = \log_3 3 = 1$
39	$f(x) = \log_3(-x)$ b لأن مجال الاقتران هو $(-\infty, 0)$، ويمر منحناه بالنقطة $(-3, 1)$ حيث $f(-3) = \log_3(-(-3)) = \log_3(3) = 1$
40	$g(x) = -\log_3 x$ a لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متناقص ويمر منحناه بالنقطة $(3, -1)$ حيث $f(3) = -\log_3 3 = -1$
41	$f(x) = \log_3(x^2)$ بما أن $x^2 > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية عدا العدد 0 فإن مجال هذا الاقتران هو $R - \{0\}$ خط التقارب الرأسي هو $x = 0$ (المحور y)
42	$f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$ $x^2 - x - 2 > 0$ $(x - 2)(x + 1) > 0$  نلاحظ أن $(x - 2)(x + 1) > 0$ في الفترتين $(-\infty, -1)$، و $(2, \infty)$ إذن، مجال الاقتران هو $(-\infty, -1), (2, \infty)$ خطا التقارب الرأسيان هما $x = -1, x = 2$ وهما جذرا المعادلة $x^2 - x - 2 = 0$



43	$f(x) = \log_3 \left(\frac{x+1}{x-5} \right)$ يكون $\frac{x+1}{x-5} > 0$ عندما يكون البسط والمقام موجبان معًا، أو سالبان معًا إشارة $(x+1)$  إشارة $(x-5)$  نلاحظ أن $x+1$ و $x-5$ لهما الإشارة نفسها في الفترتين $(-\infty, -1)$ و $(5, \infty)$ إذن، مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ خط التقارب الرأسيان هما $x = -1, x = 5$ وهما جذرا المعادلتين $x-5=0, x+1=0$
44	الكتابة الصحيحة للصورة اللوغاريتمية هي: $\log_4 \frac{1}{64} = -3$



الدرس الرابع: قوانين اللوغاريتمات

مسألة اليوم صفحة 35

$$\begin{aligned}L &= 10 \log_{10} R \\L &= 10 \log_{10}(100 \times 10^6) \\&= 10 \log_{10} 10^8 = 10 \times 8 = 80\end{aligned}$$

شدة الصوت تساوي 80 ديسيبل

أتحقق من فهمي صفحة 36

a

$$\begin{aligned}\log_b 14 &= \log_b (2 \times 7) \\&= \log_b 2 + \log_b 7 \\&\approx 0.43 + 1.21 \\&\approx 1.64\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\log_b \frac{2}{7} &= \log_b 2 - \log_b 7 \\&\approx 0.43 - 1.21 \\&\approx -0.78\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}\log_b 32 &= \log_b 2^5 \\&= 5 \log_b 2 \\&\approx 5 \times 0.43 \\&\approx 2.15\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}\log_b \frac{1}{49} &= \log_b 1 - \log_b 49 \\&= 0 - \log_b 7^2 \\&= 0 - 2 \log_b 7 \\&\approx 0 - 2 \times 1.21 \\&\approx -2.42\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي صفحة 38

a

$$\begin{aligned}\log_2 a^2 b^9 &= \log_2 a^2 + \log_2 b^9 \\&= 2 \log_2 a + 9 \log_2 b\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} &= \log_5 (x+1)^3 - \log_5 8 \\&= 3 \log_5 (x+1) - \log_5 8\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5} &= \log_3 x^7 y^3 - \log_3 z^5 \\&= \log_3 x^7 + \log_3 y^3 - \log_3 z^5 \\&= 7 \log_3 x + 3 \log_3 y - 5 \log_3 z\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}} &= \log_b \left(\frac{x^7 b^2}{y^5} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \log_b \frac{x^7 b^2}{y^5} \\ &= \frac{1}{3} (\log_b x^7 b^2 - \log_b y^5) \\ &= \frac{1}{3} (\log_b x^7 + \log_b b^2 - \log_b y^5) \\ &= \frac{1}{3} (7 \log_b x + 2 \log_b b - 5 \log_b y) \\ &= \frac{7}{3} \log_b x + \frac{2}{3} \log_b b - \frac{5}{3} \log_b y \\ &= \frac{7}{3} \log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \log_b y\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي صفحة 39

$$\begin{aligned}\log_5 a + 3 \log_5 b &= \log_5 a + \log_5 b^3 \\ &= \log_5 ab^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5 \log_b x + \frac{1}{2} \log_b y - 9 \log_b z &= \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9 \\ &= \log_b x^5 y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9 \\ &= \log_b \frac{x^5 y^{\frac{1}{2}}}{z^9} \\ &= \log_b \frac{x^5 \sqrt{y}}{z^9}\end{aligned}$$



أتحقق من فهمي صفحة 40

$$M(t) = 92 - 28 \log_{10}(t + 1)$$

$$M(29) = 92 - 28 \log_{10}(29 + 1)$$

$$= 92 - 28 \log_{10} 30$$

$$= 92 - 28 \log_{10}(10 \times 3)$$

$$= 92 - 28(\log_{10} 10 + \log_{10} 3)$$

$$\approx 92 - 28(1 + 0.4771)$$

$$\approx 92 - 28(1.4771)$$

$$\approx 92 - 41.3588$$

$$\approx 51$$

النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا هي 51% تقريبًا

أتدرب وأحل المسائل صفحة 40

1

$$\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6$$

$$\approx 0.699 - 0.778$$

$$\approx -0.079$$

2

$$\log_a 30 = \log_a(5 \times 6)$$

$$= \log_a 5 + \log_a 6$$

$$\approx 0.699 + 0.778$$

$$\approx 1.477$$

3

$$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$$

4

$$\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6$$

$$\approx 0 - 0.778$$

$$\approx -0.778$$



5	$\begin{aligned}\log_a 900 &= \log_a 30^2 \\ &= 2 \log_a 30 \\ &= 2 \log_a (5 \times 6) \\ &= 2(\log_a 5 + \log_a 6) \\ &\approx 2(0.699 + 0.778) \\ &\approx 2 \times 1.477 \\ &\approx 2.954\end{aligned}$
6	$\begin{aligned}\log_a \frac{18}{15} &= \log_a \frac{6}{5} \\ &= \log_a 6 - \log_a 5 \\ &\approx 0.778 - 0.699 \\ &\approx 0.079\end{aligned}$
7	$\begin{aligned}\log_a (6a^2) &= \log_a 6 + \log_a a^2 \\ &= \log_a 6 + 2 \log_a a \\ &\approx 0.778 + 2 \\ &\approx 2.778\end{aligned}$
8	$\begin{aligned}\log_a \sqrt[4]{25} &= \log_a \sqrt[4]{5^2} \\ &= \log_a 5^{\frac{2}{4}} \\ &= \log_a 5^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_a 5 \\ &\approx \frac{1}{2} \times 0.699 \\ &\approx 0.350\end{aligned}$
9	$\begin{aligned}(\log_a 5)(\log_a 6) &\approx 0.699 \times 0.778 \\ &\approx 0.544\end{aligned}$
10	$\log_a x^2 = 2 \log_a x$



11	$\begin{aligned}\log_a \left(\frac{a}{bc} \right) &= \log_a a - \log_a bc \\ &= \log_a a - (\log_a b + \log_a c) \\ &= \log_a a - \log_a b - \log_a c \\ &= 1 - \log_a b - \log_a c\end{aligned}$
12	$\begin{aligned}\log_a (\sqrt{x}\sqrt{y}) &= \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y} \\ &= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y\end{aligned}$
13	$\begin{aligned}\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y} \right) &= \log_a \sqrt{z} - \log_a y \\ &= \log_a z^{\frac{1}{2}} - \log_a y \\ &= \frac{1}{2} \log_a z - \log_a y\end{aligned}$
14	$\begin{aligned}\log_a \frac{1}{x^2 y^2} &= \log_a 1 - \log_a x^2 y^2 \\ &= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2) \\ &= 0 - (2 \log_a x + 2 \log_a y) \\ &= -2 \log_a x - 2 \log_a y\end{aligned}$
15	$\begin{aligned}\log_a \sqrt[5]{32x^5} &= \log_a (\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{x^5}) \\ &= \log_a 2x \\ &= \log_a 2 + \log_a x\end{aligned}$
16	$\begin{aligned}\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3} &= \log_a \frac{1}{x^2 y^3} \\ &= \log_a 1 - \log_a x^2 y^3 \\ &= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3) \\ &= 0 - (2 \log_a x + 3 \log_a y) \\ &= -2 \log_a x - 3 \log_a y\end{aligned}$
17	$\log_a (x + y - z)^7 = 7 \log_a (x + y - z)$



18	$\begin{aligned}\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}} &= \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2z^4}} \\&= \log_a \frac{\sqrt{x^{12}}}{\sqrt{y^2}\sqrt{z^4}} \\&= \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{4}{2}}} \\&= \log_a \frac{x^6}{yz^2} \\&= \log_a x^6 - \log_a yz^2 \\&= 6\log_a x - (\log_a y + \log_a z^2) \\&= 6\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z) \\&= 6\log_a x - \log_a y - 2\log_a z\end{aligned}$
19	$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
20	$\log_b(x+y) - \log_b(x-y) = \log_b \frac{x+y}{x-y}$
21	$\begin{aligned}\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} &= \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \\&= \log_a \frac{1}{x}\end{aligned}$
22	$\begin{aligned}\log_a(x^2-4) - \log_a(x+2) &= \log_a \frac{(x^2-4)}{(x+2)} \\&= \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} \\&= \log_a(x-2)\end{aligned}$
23	$\begin{aligned}2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z &= \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}} \\&= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}} \\&= \log_b \frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3} \\&= \log_b \frac{x^2 \sqrt[3]{z}}{y^3}\end{aligned}$
24	$\log_b 1 + 2\log_b b = \log_b b^2 = 2$



25	$\begin{aligned}f(x) &= 29 + 48.8 \log_6(x + 2) \\f(10) &= 29 + 48.8 \log_6(10 + 2) \\&= 29 + 48.8 \log_6 12 \\&= 29 + 48.8 \log_6(6 \times 2) \\&= 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2) \\&\approx 29 + 48.8(1 + 0.3869) \\&\approx 29 + 48.8(1.3869) \\&\approx 29 + 67.68072 \\&\approx 97\end{aligned}$ النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ هي 97% تقريباً
26	$\begin{aligned}\frac{\log_a 216}{\log_a 36} &= \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2} \\&= \frac{3 \log_a 6}{2 \log_a 6} \\&= \frac{3}{2}\end{aligned}$
27	$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$
28	$\begin{aligned}&\log_b(b - 3) + \log_b(b^2 + 3b) - \log_b(b^2 - 9) \\&= \log_b(b - 3)(b^2 + 3b) - \log_b(b^2 - 9) \\&= \log_b \frac{(b - 3)(b^2 + 3b)}{(b^2 - 9)} \\&= \log_b \frac{(b - 3) \times b(b + 3)}{(b - 3)(b + 3)} \\&= \log_b b \\&= 1\end{aligned}$



الدرس الخامس: المعادلات الأسية

مسألة اليوم صفحة 42

$$A(t) = 10e^{-0.0862t}$$

$$0.5 = 10e^{-0.0862t}$$

$$0.05 = e^{-0.0862t}$$

$$-0.0862t = \ln 0.05$$

$$t = -\frac{\ln 0.05}{0.0862} \approx 35$$

بعد حوالي 35 يوماً سيظل من هذه العينة 0.5 g

أتحقق من فهمي صفحة 43

a $\log 13 \approx 1.1$

b $\log(3.1 \times 10^4) = \log 3.1 + \log 10^4$
 $= \log 3.1 + 4\log 10 \approx 0.491 + 4 \approx 4.5$

c $\ln 0.25 \approx -1.4$

أتحقق من فهمي صفحة 44

a $\log_3 51 = \frac{\log 51}{\log 3} \approx 3.58$

b $\log_{\frac{1}{2}} 13 = \frac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \approx -3.70$

أتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 48

a $7^x = 9$

$$x = \log_7 9 = \frac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$$



b	$2e^{5x} = 64$ $e^{5x} = 32$ $5x = \ln 32$ $x = \frac{1}{5} \ln 32 \approx 0.6931$
c	$7^{2x+1} = 2^{x-4}$ $\log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4}$ $(2x+1) \log 7 = (x-4) \log 2$ $2x \log 7 + \log 7 = x \log 2 - 4 \log 2$ $2x \log 7 - x \log 2 = -\log 7 - 4 \log 2$ $x(2 \log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4 \log 2$ $x = \frac{-\log 7 - 4 \log 2}{2 \log 7 - \log 2} \approx -1.4751$
d	$4^x + 2^x - 12 = 0$ $(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$ $u^2 + u - 12 = 0$ $(u+4)(u-3) = 0$ $u = -4 \quad \text{or} \quad u = 3$ $2^x = -4 \quad \text{or} \quad 2^x = 3$ المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x $2^x = 3 \quad \rightarrow \quad x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$



أتحقق من فهمي مثال 4 صفحة 48

$$9 = 6.5(1.014)^t$$

$$\frac{9}{6.5} = (1.014)^t$$

$$\ln \frac{9}{6.5} = \ln(1.014)^t \rightarrow \ln 9 - \ln 6.5 = t \ln 1.014$$

$$t = \frac{\ln 9 - \ln 6.5}{\ln 1.014} \approx 23$$

إذن، سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة بعد 23 سنة تقريبًا من عام 2006

أتدرب وأحل المسائل صفحة 49

1 $\log 19 \approx 1.3$

2 $\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$

3 $\ln 3.1 \approx 1.1$

4 $\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$

5 $\log_3 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1.8$

6 $\ln 5 \approx 1.6$

7 $\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$

8 $\log_{\frac{1}{3}} 17 = \frac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 17}{\log 1 - \log 3} \approx -2.58$

9 $\log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$

10 $\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$

11 $\log 1000 = 3$

12 $\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$



13	$6^x = 121$ $\log 6^x = \log 121 \rightarrow x \log 6 = \log 121$ $\rightarrow x = \frac{\log 121}{\log 6} \approx 2.6766$
14	$-3e^{4x} = -27$ $e^{4x} = 9$ $4x = \ln 9$ $x = \frac{1}{4} \ln 9 \approx 0.5493$
15	$5^{7x-2} = 3^{2x}$ $\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$ $(7x-2) \log 5 = (2x) \log 3$ $7x \log 5 - 2 \log 5 = 2x \log 3$ $7x \log 5 - 2x \log 3 = 2 \log 5$ $x(7 \log 5 - 2 \log 3) = 2 \log 5$ $x = \frac{2 \log 5}{7 \log 5 - 2 \log 3} \approx 0.3549$
16	$25^x + 5^x - 42 = 0$ $(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$ $u^2 + u - 42 = 0$ $(u+7)(u-6) = 0$ $u = -7 \text{ or } u = 6$ $5^x = -7 \text{ or } 5^x = 6$ المعادلة $5^x = -7$ ليس لها حل لأن $5^x > 0$ لكل قيم المتغير x $5^x = 6 \rightarrow x \log 5 = \log 6 \rightarrow x = \frac{\log 6}{\log 5} \approx 1.1133$
17	$2(9)^x = 32 \rightarrow 9^x = 16 \rightarrow x \log 9 = \log 16$ $\rightarrow x = \frac{\log 16}{\log 9} \approx 1.2619$



18	$27^{2x+3} = 2^{x-5}$ $\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$ $(2x + 3) \log 27 = (x - 5) \log 2$ $2x \log 27 + 3 \log 27 = x \log 2 - 5 \log 2$ $2x \log 27 - x \log 2 = -3 \log 27 - 5 \log 2$ $x(2 \log 27 - \log 2) = -3 \log 27 - 5 \log 2$ $x = \frac{-3 \log 27 - 5 \log 2}{2 \log 27 - \log 2} \approx -2.2638$
19	$2P = Pe^{0.05t}$ $2 = e^{0.05t}$ $0.05t = \ln 2$ $t = \frac{1}{0.05} \ln 2$ $= 20 \ln 2 \approx 14$ بعد 14 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي
20	$3P = Pe^{0.05t}$ $3 = e^{0.05t}$ $0.05t = \ln 3$ $t = 20 \ln 3 \approx 22$ بعد 22 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي



21

$$97 = 873e^{-0.078t}$$

$$\frac{97}{873} = e^{-0.078t}$$

$$\frac{1}{9} = e^{-0.078t}$$

$$-0.078t = \ln \frac{1}{9}$$

$$-0.078t = \ln 1 - \ln 9$$

$$-0.078t = 0 - \ln 9$$

$$-0.078t = -\ln 9$$

$$t = \frac{\ln 9}{0.078} \approx 28$$

بعد 28 سنة تقريباً يصبح في الغابة 97 حيواناً من الكوالا

22

$$f(x) = e^{0.5x+3}$$

بما أن النقطة $(-2, k)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثيها يحققان معادلة المنحنى

$$f(-2) = e^{0.5(-2)+3}$$

$$k = e^2 \approx 7.39$$

بما أن النقطة $(h, 100)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثيها يحققان معادلة المنحنى

$$f(h) = e^{0.5h+3}$$

$$100 = e^{0.5h+3}$$

$$0.5h + 3 = \ln 100$$

$$0.5h = \ln 100 - 3$$

$$h = \frac{1}{0.5} \ln 100 - \frac{3}{0.5}$$

$$h = 2 \ln 100 - 6 \approx 3.2$$



23

$$3^x + \frac{4}{3^x} = 5$$

$$3^x \left(3^x + \frac{4}{3^x} \right) = 3^x \times 5$$

$$3^{2x} + 4 = 5(3^x)$$

$$3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$$

$$(3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0$$

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$(u - 4)(u - 1) = 0$$

$$u = 4 \quad \text{or} \quad u = 1$$

$$3^x = 4 \quad \text{or} \quad 3^x = 1$$

$$3^x = 4 \quad \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26$$

$$3^x = 1 \quad \rightarrow x = \log_3 1 = 0$$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 50

1	d
2	c
3	a
4	c
5	a
6	b
7	b
8	a
9	b
10	$\log_5 16 = \log_5 4^2$ $= 2 \log_5 4$ $= 2k$

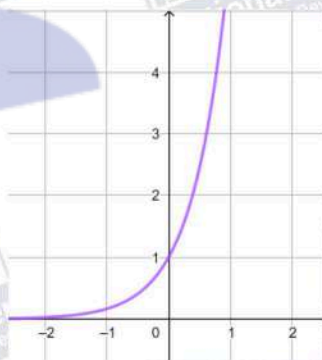


11

$$\begin{aligned}\log_5 0.25 &= \log_5 \frac{25}{100} \\ &= \log_5 \frac{1}{4} \\ &= \log_5 1 - \log_5 4 \\ &= 0 - \log_5 4 \\ &= -k\end{aligned}$$

12

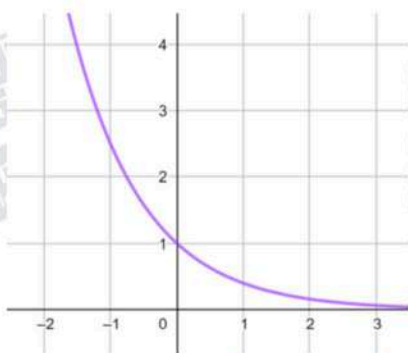
$$f(x) = 6^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

13

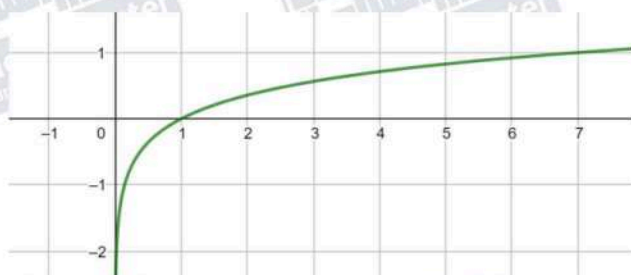
$$g(x) = (0.4)^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

14

$$h(x) = \log_7 x$$



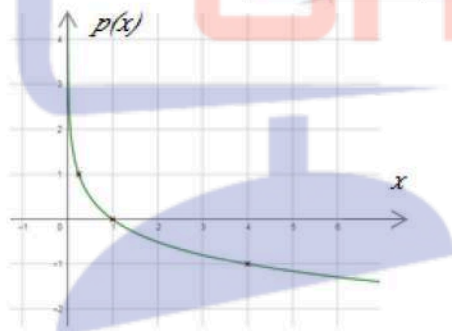
مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R



15

$$p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

$x = \left(\frac{1}{4}\right)^y$	4	1	$\frac{1}{4}$
y	-1	0	1
(x, y)	(4, -1)	(1, 0)	(0.25, 1)



مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

16

$$8^x = 2$$

$$2^{3x} = 2^1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

17

$$-3e^{4x+1} = -96$$

$$e^{4x+1} = 32$$

$$4x + 1 = \ln 32$$

$$4x = \ln 32 - 1$$

$$x = \frac{\ln 32 - 1}{4} \approx 0.6164$$

18

$$11^{2x+3} = 5^x$$

$$\log 11^{2x+3} = \log 5^x$$

$$(2x + 3) \log 11 = (x) \log 5$$

$$2x \log 11 + 3 \log 11 = x \log 5$$

$$2x \log 11 - x \log 5 = -3 \log 11$$

$$x(2 \log 11 - \log 5) = -3 \log 11$$

$$x = \frac{-3 \log 11}{2 \log 11 - \log 5} \approx -2.2577$$



19	$49^x + 7^x - 72 = 0$ $(7^x)^2 + 7^x - 72 = 0$ $u^2 + u - 72 = 0$ $(u + 9)(u - 8) = 0$ $u = -9 \text{ or } u = 8$ $7^x = -9 \text{ or } 7^x = 8$ المعادلة $7^x = -9$ ليس لها حل لأن $7^x > 0$ لكل قيم المتغير x $7^x = 8 \rightarrow x = \log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.0686$
20	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $A = 2500 \left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \times 15} \approx 4688.87$ جملة المبلغ بعد 15 سنة هي JD 4688.87 تقريباً
21	$A = Pe^{rt}$ $A = 800e^{0.045 \times 5} \approx 1001.86$ جملة المبلغ بعد 5 سنوات هي JD1001.86 تقريباً
22	$v(t) = 30e^{0.1t}$ $10000 = 30e^{0.1t}$ $\frac{1000}{3} = e^{0.1t}$ $0.1t = \ln \frac{1000}{3}$ $t = \frac{1}{0.1} \ln \frac{1000}{3} \approx 58.1$ الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس هو 58.1 دقيقة تقريباً
23	$N(t) = 100e^{0.045t}$ $N(0) = 100e^{0.045 \times 0} = 100$ العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العينة هو 100 خلية
24	$N(5) = 100e^{0.045 \times 5} \approx 125$ عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 أيام هو 125 خلية تقريباً



25	$1400 = 100e^{0.045t}$ $14 = e^{0.045t}$ $0.045t = \ln 14$ $t = \frac{\ln 14}{0.045} \approx 59$ بعد 59 يوماً تقريباً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1400 خلية
26	$200 = 100e^{0.045t}$ $2 = e^{0.045t}$ $0.045t = \ln 2$ $t = \frac{\ln 2}{0.045} \approx 15$ بعد 15 يوماً تقريباً يصبح عدد الخلايا البكتيرية ضعف العدد الأصلي
27	$A(h) = a(1 - r)^h$ $A(h) = 1000(1 - 0.12)^h$ $= 1000(0.88)^h$
28	$500 = 1000(0.88)^h$ $0.5 = (0.88)^h \rightarrow \log 0.5 = h \log 0.88$ $\rightarrow h = \frac{\log 0.5}{\log 0.88} \approx 5.42$ عند ارتفاع 5.42 كيلومتر تقريباً فوق سطح البحر تصبح قيمة الضغط الجوي مساوية نصف قيمتها عند سطح البحر
29	$S(x) = 400 + 250 \log x$ $S(10) = 400 + 250 \log 10 = 650$ أي أن إنفاق JD 10000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD 650000



إجابات كتاب الطالب - مادة الرياضيات - الصف الثاني الثانوي الأدبي ف1

الوحدة الثانية: التفاضل

الدرس الأول: قاعدة السلسلة

مسألة اليوم صفحة 54

$$N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9-t^2}}$$
$$N'(t) = \frac{30 \left(\frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}} \right)}{9-t^2} = \frac{-30t}{(9-t^2)\sqrt{9-t^2}}$$

أتحقق من فهمي صفحة 56

$$y = (x^2 - 2)^4$$
$$u = x^2 - 2$$
$$y = u^4$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$
$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= 4u^3 \times 2x$$
$$= 8xu^3$$
$$= 8x(x^2 - 2)^3$$



b	$y = \sqrt{x^3 + 4x} = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}}$ $u = x^3 + 4x$ $y = u^{\frac{1}{2}}$ $\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4$ $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2 + 4)$ $= \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}$
أتحقق من فهمي صفحة 58	
a	$f'(x) = 5(x^4 + 1)^4(4x^3)$ $= 20x^3(x^4 + 1)^4$ $f'(1) = 20(1)^3((1)^4 + 1)^4 = 20 \times 16 = 320$
b	$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} = (x^2 + 3x + 2)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)^{-\frac{1}{2}}(2x + 3)$ $= \frac{1}{2}(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$ $f'(2) = \frac{2(2) + 3}{2\sqrt{2^2 + 3 \times 2 + 2}} = \frac{7}{2\sqrt{12}}$
c	$f(x) = \sqrt[4]{(2x^2 - 7)^5} = (2x^2 - 7)^{\frac{5}{4}}$ $f'(x) = \frac{5}{4}(2x^2 - 7)^{\frac{1}{4}}(4x)$ $= \frac{5}{4}(4x)(2x^2 - 7)^{\frac{1}{4}}$ $= 5x \times \sqrt[4]{2x^2 - 7}$ $f'(4) = 5 \times 4 \times \sqrt[4]{2(4)^2 - 7} = 20\sqrt[4]{25}$



أتحقق من فهمي صفحة 59

a

$$f'(x) = 4(1 + x^3)^3(3x^2) + 8x^7$$
$$= 12x^2(1 + x^3)^3 + 8x^7$$

b

$$f(x) = (2x - 1)^{\frac{1}{3}} - (x - 3)^3$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)^{-\frac{2}{3}}(2) - 3(x - 3)^2(1)$$
$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^2}} - 3(x - 3)^2$$

أتحقق من فهمي صفحة 61

a

$$P'(t) = \frac{20t + 1}{2\sqrt{10t^2 + t + 229}}$$

b

$$t = 2020 - 2015 = 5$$

$$P'(5) = \frac{101}{2\sqrt{250 + 5 + 229}} = \frac{101}{2\sqrt{484}} = \frac{101}{2 \times 22} = \frac{101}{44} \approx 2.3$$

إذن، في سنة 2020 يزداد إجمالي الأرباح بمعدل 2300 دينار لكل سنة.



أتحقق من فهمي صفحة 62

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= 5u^4 + 3u^2 \\ \frac{du}{dx} &= -4 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= (5u^4 + 3u^2) \times -4 \\ &= -4(5(3-4x)^4 + 3(3-4x)^2) \\ &= -20(3-4x)^4 - 12(3-4x)^2 \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} &= -20(625) - 12(25) = -12800\end{aligned}$$

أدرب وأحل المسائل صفحة 62

1

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4(1+2x)^3(2) \\ &= 8(1+2x)^3\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}f'(x) &= -5(3-2x^2)^{-6}(-4x) \\ &= 20x(3-2x^2)^{-6} \\ &= \frac{20x}{(3-2x^2)^6}\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{3}{2}(x^2-7x+1)^{\frac{1}{2}}(2x-7) \\ &= \frac{3}{2}(2x-7)\sqrt{x^2-7x+1}\end{aligned}$$

4

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{7-x}}$$

5

$$\begin{aligned}f'(x) &= 16(2+8x)^3(8) \\ &= 128(2+8x)^3\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}f(x) &= (4x-8)^{-\frac{1}{3}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}(4) \\ &= -\frac{4}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}} \\ &= \frac{-4}{3\sqrt[3]{(4x-8)^4}}\end{aligned}$$



7	$f'(x) = \frac{9x^2}{2\sqrt{5+3x^3}}$
8	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x-3)$
9	$f(x) = (2x - x^5)^{\frac{1}{3}} + (4-x)^2$ $f'(x) = \frac{1}{3}(2x - x^5)^{-\frac{2}{3}}(2 - 5x^4) + 2(4-x)(-1)$ $= \frac{2 - 5x^4}{3\sqrt[3]{(2x - x^5)^2}} - 8 + 2x$
10	$f'(x) = 4(\sqrt{x} + 5)^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $= \frac{2(\sqrt{x} + 5)^3}{\sqrt{x}}$
11	$f'(x) = \frac{3(2x - 5)^2(2)}{2\sqrt{(2x - 5)^3}}$ $= \frac{3(2x - 5)^2}{\sqrt{(2x - 5)^3}} = 3\sqrt{2x - 5}$
12	$f'(x) = 5(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^4(6x^2 - 6x + 4)$
13	$f(x) = (4x + 1)^{-2}$ $f'(x) = -2(4x + 1)^{-3}(4)$ $= -\frac{8}{(4x + 1)^3}$ $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{8}{\left(4 \times \frac{1}{4} + 1\right)^3} = -1$
14	$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$ $f'(3) = \frac{-3}{\sqrt{25 - (3)^2}} = -\frac{3}{4}$



$$\frac{dy}{du} = 10u + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$15 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (10u + 3) \times 3x^2$$

$$= (10(x^3 + 1) + 3) \times 3x^2$$

$$= (10x^3 + 13) \times 3x^2$$

$$= 30x^5 + 39x^2$$

$$y = (2u + 5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3} (2u + 5)^{-\frac{2}{3}} (2) = \frac{2}{3} (2u + 5)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 1$$

$$16 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{2}{3} (2u + 5)^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 1)$$

$$= \frac{2}{3} (2(x^2 - x) + 5)^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 1)$$

$$= \frac{4x - 2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 2x + 5)^2}}$$



17	$\frac{dy}{du} = 6u - 5$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (6u - 5) \times (2x)$ $= (6(x^2 - 1) - 5) \times (2x)$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=2} = (6(4 - 1) - 5) \times (4) = 52$
18	$\frac{dy}{du} = 3(1 + u^2)^2(2u) = 6u(1 + u^2)^2$ $\frac{du}{dx} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 6u(1 + u^2)^2 \times (2)$ $= 12(2x - 1)(1 + (2x - 1)^2)^2$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=1} = 12(2 - 1)(1 + (2 - 1)^2)^2 = 48$
19	$C'(x) = \frac{1000(2x - 0.1)}{2\sqrt{x^2 - 0.1x}} = \frac{1000x - 50}{\sqrt{x^2 - 0.1x}}$
20	$C'(20) = \frac{1000(20) - 50}{\sqrt{(20)^2 - 0.1(20)}} = \frac{19950}{\sqrt{398}} \approx 1000$
21	$N(t) = 400(1 - 3(t^2 + 2)^{-2})$ $N'(t) = 400 \left(6(t^2 + 2)^{-3}(2t) \right) = \frac{4800t}{(t^2 + 2)^3}$ $N'(1) = \frac{4800}{(1 + 2)^3} \approx 178$



22	$N'(4) = \frac{4800(4)}{(16+2)^3} \approx 3$
23	$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$ $f'(3) = g'(h(3)) \times h'(3)$ $= g'(2) \times -2$ $= 6 \times -2 = -12$
24	$f'(x) = 3(h(x))^2 \times h'(x)$ $f'(3) = 3(h(3))^2 \times h'(3)$ $= 3(2)^2 \times -2 = -24$
25	$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ $h'(2) = f'(g(2)) \times g'(2)$ $= f'(3) \times -1$ نجد مشتقة f ونحسب $f'(3)$ $f(u) = u^2 - 1 \rightarrow f'(u) = 2u \rightarrow f'(3) = 2 \times 3 = 6$ إذن، $h'(2) = f'(3) \times -1$ $= 6 \times -1 = -6$
26	$y = (x^2 - 4)^5$ $0 = (x^2 - 4)^5 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$ $\rightarrow x = 2 \text{ or } x = -2$ $\frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 4)^4(2x) = 10x(x^2 - 4)^4$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=2} = 10(2)(2^2 - 4)^4 = 0$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=-2} = 10(-2)((-2)^2 - 4)^4 = 0$
27	$p(x)$ هو الاقتران الوحيد الذي يمكن اشتقاقه بدون تطبيق قاعدة السلسلة



28	$f(x) = (2x + (x^2 + x)^4)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{1}{3} (2x + (x^2 + x)^4)^{-\frac{2}{3}} (2 + 4(x^2 + x)^3(2x + 1))$ $= \frac{2 + 4(x^2 + x)^3(2x + 1)}{3\sqrt[3]{(2x + (x^2 + x)^4)^2}}$
----	---

الدرس الثاني: مشتقا الضرب والقسمة

مسألة اليوم صفحة 64

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(8 + t^3)(3t^2) - (t^3)(3t^2)}{(8 + t^3)^2}$$

$$= \frac{24t^2 + 3t^5 - 3t^5}{(8 + t^3)^2}$$

$$= \frac{24t^2}{(8 + t^3)^2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 65

a	$f'(x) = (x^3 + 4)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2)$ $= 14x^4 - 4x^3 + 56x - 16 + 21x^4 - 12x^3$ $= 35x^4 - 16x^3 + 56x - 16$
---	---

b	$f'(x) = (\sqrt{x} + 1)(3) + (3x - 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $= \frac{9}{2}\sqrt{x} + 3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$
---	--



أتحقق من فهمي صفحة 67

a

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x-2)(3) - (3x+1)(1)}{(x-2)^2} \\&= \frac{3x-6-3x-1}{(x-2)^2} \\&= \frac{-7}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x^2+1)(-3x^{-4}) - (x^{-3})(2x)}{(x^2+1)^2} \\&= \frac{-3x^{-2} - 3x^{-4} - 2x^{-2}}{(x^2+1)^2} \\&= \frac{-5x^{-2} - 3x^{-4}}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي صفحة 68

a

$$\begin{aligned}P'(t) &= \frac{(2t^2+9)(0) - (5)(4t)}{(2t^2+9)^2} \\&= \frac{-20t}{(2t^2+9)^2}\end{aligned}$$

b

$$P'(2) = \frac{-40}{(8+9)^2} = \frac{-40}{289} \approx -0.14$$

يتناقص عدد السكان بمعدل 140 نسمة لكل سنة بعد سنتين من الآن

أتحقق من فهمي صفحة 70

a

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-(1)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} \\&= \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\end{aligned}$$



b	$f'(x) = \frac{-(3)(2)}{(2x+1)^2}$ $= \frac{-6}{(2x+1)^2}$
أتحقق من فهمي صفحة 71	
a	$f'(x) = (20x) \times 6(4x^3 - 1)^5(12x^2) + (4x^3 - 1)^6(20)$ $= (4x^3 - 1)^5(1520x^3 - 20)$
b	$f'(x) = \frac{(x+2)^4(2x) - (x^2-1) \times 4(x+2)^3 \times 1}{(x+2)^8}$ $= \frac{2x(x+2)^4 - 4(x^2-1)(x+2)^3}{(x+2)^8}$ $= \frac{(x+2)^3(2x(x+2) - 4(x^2-1))}{(x+2)^8}$ $= \frac{-2x^2 + 4x + 4}{(x+2)^5}$
أدرب وأحل المسائل صفحة 71	
1	$f'(x) = x \times 5(1+3x)^4(3) + (1+3x)^5(1)$ $= (1+3x)^4(18x+1)$
2	$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - (x+3)(1)}{(x+1)^2}$ $= \frac{-2}{(x+1)^2}$
3	$f'(x) = (2x+1)^5 \times 4(3x+2)^3(3) + (3x+2)^4 \times 5(2x+1)^4 \times 2$ $= 2(2x+1)^4(3x+2)^3(27x+16)$



4	$f'(x) = \frac{(2x-1)^2(6x) - (3x^2) \times 2(2x-1)(2)}{(2x-1)^4}$ $= \frac{6(2x-1)(2x^2 - x - 2x^2)}{(2x-1)^4}$ $= \frac{-6x}{(2x-1)^3}$
5	$f'(x) = \frac{(\sqrt{5x+3})(6) - (6x)\left(\frac{5}{2\sqrt{5x+3}}\right)}{5x+3} = \frac{30x+18-15x}{(5x+3)\sqrt{5x+3}}$ $= \frac{15x+18}{(5x+3)\sqrt{5x+3}}$
6	$f'(x) = (4x-1)(2x) + (x^2-5)(4)$ $= 8x^2 - 2x + 4x^2 - 20$ $= 12x^2 - 2x - 20$
7	$f'(x) = \frac{(2x-7)(2x) - (x^2+6)(2)}{(2x-7)^2}$ $= \frac{4x^2 - 14x - 2x^2 - 12}{(2x-7)^2}$ $= \frac{2x^2 - 14x - 12}{(2x-7)^2}$
8	$f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(1) - (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}$ $= \frac{1+\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$ $= \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$



9	$f'(x) = (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + (\sqrt{x-1})(1)$ $= \frac{x+1}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1} = \frac{x+1+2x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x-1}}$
10	$f'(x) = \frac{(1)(5+2x) - (x)(2)}{(5+2x)^2} - 8x^3$ $= \frac{5}{(5+2x)^2} - 8x^3$
11	$f'(x) = \frac{(-5)(2)(x+2)(1)}{(x+2)^4}$ $= \frac{-10}{(x+2)^3}$
12	$f'(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)(2x) + (x^2 - 3)\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$ $= 2x^2 + 4 + x^2 - 3 - 2 + \frac{6}{x^2}$ $= 3x^2 - 1 + \frac{6}{x^2}$
13	$f'(x) = (8x + \sqrt{x})(10x) + (5x^2 + 3)\left(8 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $= 80x^2 + 10x^{\frac{3}{2}} + 40x^2 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 24 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ $= 120x^2 + \frac{25}{2}x^{\frac{3}{2}} + 24 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
14	$f(x) = 5x - 25 + 50x^{-2} - 10x^{-3}$ $f'(x) = 5 - 100x^{-3} + 30x^{-4}$
15	$f'(x) = (x^2) \times 3(3x-1)^2 \times 3 + (3x-1)^3(2x)$ $f'(1) = (1)3(3-1)^2 \times 3 + (3(1)-1)^3(2(1)) = 36 + 16 = 52$



16	$f'(x) = (3x) \left(\frac{-1}{2\sqrt{5-x}} \right) + (\sqrt{5-x})(3)$ $f'(4) = \frac{(3 \times 4)(-1)}{2\sqrt{5-4}} + (\sqrt{5-4})(3)$ $= \frac{-12}{2 \times 1} + 1 \times 3 = -6 + 3 = -3$
17	$f'(x) = \frac{(2x+1)(1) - (x-1)(2)}{(2x+1)^2} = \frac{3}{(2x+1)^2}$ $f'(2) = \frac{3}{(4+1)^2} = \frac{3}{25}$
18	$f'(x) = (2x+3) \times 2(x-2)(1) + (x-2)^2(2)$ $f'(0) = 3 \times 2(-2) + 2(-2)^2 = -12 + 8 = -4$
19	$S'(t) = \frac{(4 + 0.3t)(2000) - 2000t(0.3)}{(4 + 0.3t)^2}$ $= \frac{8000}{(4 + 0.3t)^2}$
20	$t = 2030 - 2020 = 10$ $S'(10) = \frac{8000}{(4 + 3)^2} = \frac{8000}{49} \approx 163$ يتزايد إجمالي المبيعات بمقدار 163 ألف دينار لكل سنة في عام 2030م.
21	ملاحظة: نرجو حذف كلمة (بالآلاف) من مقدمة السؤال لتدل P على عدد السكان بوحدة الفرد الواحد (شخص أو نسمة). $P'(t) = 12(2t^2 + 100)(1) + (t + 20) \times 12(4t) = 12(6t^2 + 80t + 100)$
22	$P'(6) = 12(216 + 480 + 100) = 12(796) = 9552$ يتزايد عدد السكان بمعدل 9552 نسمة كل سنة بعد 6 سنوات من الآن.



23

$$M'(t) = \frac{(t + 1.9)(5.8) - (5.8t)(1)}{(t + 1.9)^2}$$

$$= \frac{11.02}{(t + 1.9)^2}$$

$$M'(5) = \frac{11.02}{(5 + 1.9)^2} \approx 0.23$$

$$\frac{dy}{du} = u \times 3(u^2 + 3)^2(2u) + (u^2 + 3)^3(1) = (u^2 + 3)^2(7u^2 + 3)$$

$$\frac{du}{dx} = 2(x + 3)(1) = 2x + 6$$

عندما $x = -2$ ، فإن $u = (-2 + 3)^2 = 1$

24

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-2} = \left. \frac{dy}{du} \right|_{u=1} \times \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-2}$$

$$\left. \frac{dy}{du} \right|_{u=1} = (1^2 + 3)^2(7(1^2) + 3) = 16(10) = 160$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-2} = 2(-2) + 6 = 2$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-2} = 160 \times 2 = 320$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u + 1) \times 3u^2 - u^3(1)}{(u + 1)^2} = \frac{2u^3 + 3u^2}{(u + 1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 3(x^2 + 1)^2(2x) = 6x(x^2 + 1)^2$$

عندما $x = 1$ ، فإن $u = (1^2 + 1)^3 = 8$

25

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \left. \frac{dy}{du} \right|_{u=8} \times \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1}$$

$$\left. \frac{dy}{du} \right|_{u=8} = \frac{2(8^3) + 3(8^2)}{(8 + 1)^2} = \frac{1216}{81}$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 6(1)(1^2 + 1)^2 = 24$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{1216}{81} \times 24 = \frac{9728}{27}$$



26	$(fg)'(x) = (f \times g)'(x)$ $= f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$ $(fg)'(2) = f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$ $= 4 \times 2 + 3 \times -1 = 5$
27	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2) \times f'(2) - f(2) \times g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{3 \times -1 - 4 \times 2}{(3)^2} = -\frac{11}{9}$
28	$(3f + fg)'(x) = 3f'(x) + f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$ $(3f + fg)'(2) = 3f'(2) + f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$ $= 3 \times -1 + 4 \times 2 + 3 \times -1 = 2$
29	$f'(x) = (x(4x-3)^6) \times 9(1-4x)^8(-4) + (1-4x)^9 \times (x \times 6(4x-3)^5(4) + (4x-3)^6 \times (1))$ $f'(x) = -36x(4x-3)^6(1-4x)^8 + (1-4x)^9(24x(4x-3)^5 + (4x-3)^6)$ $= (4x-3)^5(1-4x)^8(-36x(4x-3) + (1-4x)(24x+4x-3))$ $= (4x-3)^5(1-4x)^8(-256x^2 + 148x - 3)$
30	$f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10}$ $= \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x(x+2)}{(x+5)(x+2)} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x^2+10x}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x(x+5)}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x}{x+2}$
31	$f'(x) = \frac{(x+2)(2) - (2x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$ $f'(3) = \frac{4}{(3+2)^2} = \frac{4}{25}$



$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$0 = \frac{(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$32 \quad (\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0$$

$$2\sqrt{x} - \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$x = 4$$



الدرس الثالث: مشتقتا الاقتران الأسّي والطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

مسألة اليوم صفحة 73

$$N = 10000(1 - e^{-0.15d})$$

$$N'(d) = 10000(0.15e^{-0.15d})$$

$$= 1500e^{-0.15d}$$

أتحقق من فهمي صفحة 74

a $f'(x) = 2e^x$

b $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + e^x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + e^x$

c $\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x = e^x(x + 1)$

أتحقق من فهمي صفحة 75

a $f'(x) = 7e^{7x+1}$

b $f'(x) = 3x^2e^{x^3}$

c $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

أتحقق من فهمي صفحة 76

a $P'(t) = 50(-0.004)e^{-0.004t} = -0.2e^{-0.004t}$

$$P'(500) = -0.2e^{-0.004(500)} = -0.2e^{-2} \approx -0.03$$

تتناقص الطاقة المتبقية بمعدل 0.03 واط لكل يوم بعد 500 يوم

أتحقق من فهمي صفحة 78

a $f'(x) = \frac{4}{x}$

b $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

c $f'(x) = \frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$



أتحقق من فهمي صفحة 80

a $f'(x) = \frac{8}{8x} = \frac{1}{x}$

b $f'(x) = 2 \times \frac{7x^6}{x^7} = \frac{14}{x}$

c $f'(x) = \frac{9}{9x+2}$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 80

1 $f'(x) = 2e^x$

2 $f'(x) = 3e^{3x+9}$

3 $f'(x) = (x^2 + 3x - 9)(e^x) + (e^x)(2x + 3) = e^x(x^2 + 5x - 6)$

4 $f'(x) = \frac{x^4 e^x - e^x(4x^3)}{x^8} = \frac{x e^x - 4e^x}{x^5}$

5 $f'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

6 $f'(x) = \frac{(1 + e^x)(e^x) - e^x(e^x)}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$

7 $f'(x) = (e^x + 2)(e^x) + (e^x - 1)(e^x) = 2e^{2x} + e^x$

8 $f'(x) = (e^{-2x}) \times 5(2x - 1)^4 \times 2 + (2x - 1)^5(-2e^{-2x})$
 $= 2e^{-2x}(2x - 1)^4(6 - 2x)$

9 $f'(x) = 3x^2 - 5 \times 2e^{2x} = 3x^2 - 10e^{2x}$

10 $f'(x) = \frac{3}{x}$

11 $f'(x) = (x^3) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(3x^2) = x^2 + 3x^2 \ln x$

12 $f'(x) = \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} \right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$



13	$f'(x) = (x^2) \left(\frac{4}{4x} \right) + (\ln(4x))(2x) = x + 2x \ln(4x)$
14	$f'(x) = \frac{\frac{(x)(1) - (x+1)(1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{x(x+1)}$
15	$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}$
16	$f'(x) = 4(\ln x)^3 \times \frac{1}{x} = \frac{4(\ln x)^3}{x}$
17	$f'(x) = \frac{2x}{x^2-5}$
18	$f'(x) = (x^4) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(4x^3) - \frac{1}{2}e^x = x^3 + 4x^3 \ln x - \frac{1}{2}e^x$
19	$f'(x) = (e^{2x}) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(2e^{2x}) = \frac{e^{2x}(1+x \ln x)}{x}$
20	$f'(x) = (\ln 3x) \left(\frac{7}{7x} \right) + (\ln 7x) \left(\frac{3}{3x} \right) = \frac{\ln 3x + \ln 7x}{x}$
21	$f'(x) = \frac{e^x}{e^x-2}$
22	$f'(x) = (e^{2x-1}) \left(\frac{2}{2x-1} \right) + (\ln(2x-1))(2e^{2x-1})$ $f'(1) = (e^{2-1}) \left(\frac{2}{2-1} \right) + (\ln(2-1))(2e^{2-1}) = 2e + 0 = 2e$
23	$f'(x) = \frac{x \left(\frac{2x}{x^2} \right) - (\ln x^2)(1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}$ $f'(4) = \frac{2 - \ln 16}{16}$



24	$P'(t) = \frac{-100 \times -e^{3-t}}{(1 + e^{3-t})^2} = \frac{100e^{3-t}}{(1 + e^{3-t})^2}$ $P'(3) = \frac{100e^{3-3}}{(1 + e^{3-3})^2} = \frac{100}{4} = 25$
25	$m'(t) = (t) \left(\frac{1}{t} \right) + (\ln t)(1) = 1 + \ln t$
26	$\frac{dy}{du} = 2e^{2u}$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 2e^{2u} \times 2x$ $= 4xe^{2u}$ $= 4xe^{2(x^2+1)}$
27	$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u+1}$ $\frac{du}{dx} = e^x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{1}{u+1} \times e^x$ $= \frac{e^x}{e^x + 1}$
28	$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{kx} = \frac{1}{x}$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{3x}) \times \left(7 \times \frac{1}{x} - 3x^2\right) - (7 \ln x - x^3)(3e^{3x})}{(e^{3x})^2}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{(e^3) \times (7 \times 1 - 3) - (7 \ln 1 - 1)(3e^3)}{(e^3)^2}$$

29

$$= \frac{4e^3 + 3e^3}{(e^3)^2}$$

$$= \frac{7e^3}{(e^3)^2}$$

$$= \frac{7}{e^3}$$



الدرس الرابع: مشتقتا اقتران الجيب واقتان جيب التمام

مسألة اليوم صفحة 82

$$P(t) = 100 + 20 \sin 2\pi t$$

$$\frac{dP}{dt} = 40\pi \cos 2\pi t$$

أتحقق من فهمي صفحة 83

a $f'(x) = \cos x$

b $f'(x) = 3 + \sin x$

c $f'(x) = 3 \cos x - 2 \sin x$

أتحقق من فهمي صفحة 84

a $f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) = -e^x \sin x + e^x \cos x$

b
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x)(1 - \sin x) - (x + \cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x - \sin^2 x - x \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x) - x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x - 1 - x \cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 86

a $f'(x) = -5 \sin 5x$

b $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

c $f'(x) = \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x}$



تحقق من فهمي مثال 4 صفحة 86

$$h'(x) = 4 \times \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} t = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} t$$

أدرب وأحل المسائل صفحة 86

1	$f'(x) = -2 \sin x + \cos x$
2	$f'(x) = -\sin x$
3	$f'(x) = \cos x + \sin x$
4	$f'(x) = (x)(\cos x) + (\sin x)(1)$ $= x \cos x + \sin x$
5	$f'(x) = (\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)$ $= -\sin^2 x + \cos^2 x$
6	$f'(x) = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$ $= e^x \cos x + e^x \sin x$
7	$f'(x) = \frac{(\cos x)(e^x) - (e^x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x}$
8	$f'(x) = 2x \cos(x^2 + 1)$
9	$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
10	$f'(x) = -5 \sin(5x - 2)$
11	$f'(x) = 3 \cos 3x - 6 \sin 6x$
12	$f'(x) = -(2x - 3) \sin(x^2 - 3x - 4)$
13	$f'(x) = (e^{2x})(10 \cos 10x) + (\sin 10x)(2e^{2x})$ $= 10e^{2x} \cos 10x + 2e^{2x} \sin 10x$
14	$f'(x) = (\cos x^2) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(-2x \sin x^2)$ $= \frac{1}{x} (\cos x^2) - 2x (\ln x) \sin x^2$



15	$f'(x) = (\sqrt{x+1}) \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \right) + \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)$
16	$f(x) = 4(\sin x)^2$ $f'(x) = 4 \times 2(\sin x)(\cos x) = 8\sin x \cos x$
17	$f(x) = (\cos 2x)^3(\cos x)$ $f'(x) = (\cos 2x)^3(-\sin x) + (\cos x) \times 3(\cos 2x)^2 \times -2 \sin 2x$ $= -(\cos 2x)^3(\sin x) - 6(\cos x)(\cos 2x)^2 \sin 2x$
18	$f'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} = \frac{5}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$
19	$f'(x) = 2(\cos 2x - \sin x)(-2 \sin 2x - \cos x)$
20	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + \frac{2 \cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$
21	$f'(x) = \frac{(\sin x) \left(2(\ln x) \times \frac{1}{x} \right) - (\ln x)^2(\cos x)}{\sin^2 x}$ $= \frac{2 \sin x \ln x - x \cos x (\ln x)^2}{x \sin^2 x}$
22	$D'(t) = 400 \times 0.4 \cos 0.4t = 160 \cos 0.4t$
23	$H'(t) = 2.4 \times \frac{2\pi}{365} \cos \left(\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right) = \frac{4.8\pi}{365} \cos \left(\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right)$



24	$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \left(1 - ((\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - (-\sin^2 x + \cos^2 x) \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 x - \cos^2 x) \\ &= \frac{1}{2} (\sin^2 x + 1 - \cos^2 x) \\ &= \frac{1}{2} (\sin^2 x + \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2} (2 \sin^2 x) \\ &= \sin^2 x\end{aligned}$
25	$\begin{aligned}f(x) &= (e^x \cos x)(\sin x)^2 \\ f'(x) &= (e^x \cos x)(2(\sin x)^1 \cos x) + (\sin x)^2((e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x)) \\ &= e^x \sin x (2\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x \sin x)\end{aligned}$
26	$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$



اختبار نهاية الوحدة الثانية

1	d
2	b
3	a
4	c
5	c
6	a
7	b
8	$(fg)'(x) = (f(x))(g'(x)) + (g(x))(f'(x))$ $(fg)'(2) = (f(2))(g'(2)) + (g(2))(f'(2))$ $= (3)(2) + (1)(-4) = 2$
9	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(g(x))(f'(x)) - (f(x))(g'(x))}{(g(x))^2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{(g(2))(f'(2)) - (f(2))(g'(2))}{(g(2))^2}$ $= \frac{(1)(-4) - (3)(2)}{(1)^2} = -10$
10	$(3f - 4fg)'(x) = 3f'(x) - 4((f(x))(g'(x)) + (g(x))(f'(x)))$ $(3f - 4fg)'(2) = 3f'(2) - 4((f(2))(g'(2)) + (g(2))(f'(2)))$ $= 3(-4) - 4((3)(2) + (1)(-4))$ $= -12 - 4(2)$ $= -20$
11	$h'(t) = 0.12 \times 0.1e^{0.1t}$ $= 0.012e^{0.1t}$



12	$h'(3) = 0.012e^{0.1(3)} \approx 0.016$
13	$f'(x) = \frac{(3x+1)(1) - (x)(3)}{(3x+1)^2} = \frac{1}{(3x+1)^2}$ $f'(1) = \frac{1}{(3(1)+1)^2} = \frac{1}{16}$
14	$f'(x) = (x^2 + 2) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (x + \sqrt{x})(2x)$ $f'(4) = (4^2 + 2) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{4}}\right) + (4 + \sqrt{4})(2 \times 4) = 18 \left(1 + \frac{1}{4}\right) + 6(8) = 70.5$
15	$f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{-3x}$ $f'(1) = 3e^3 - 3e^{-3}$
16	$f'(x) = -2x$ $f'(20) = -2(20) = -40$
17	$f'(x) = (x^2)(3)(3x-1)^2(3) + (3x-1)^3(2x)$ $f'(1) = (1)(3)(3-1)^2(3) + (3-1)^3(2)$ $= 36 + 16 = 52$
18	$f'(x) = (x+3)^2(3e^{3x}) + (e^{3x})(2)(x+3)(1)$ $f'(2) = (2+3)^2(3e^6) + (e^6)(2)(2+3)(1)$ $= 75e^6 + 10e^6$ $= 85e^6$
19	$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ $f'(e) = \frac{3}{e} - \frac{1}{e^2}$
20	$f'(x) = \frac{8x^3}{2\sqrt{2x^4+7}}$



21	$f'(x) = \frac{-1 \times 5(x^2 + 16)^4(2x)}{(x^2 + 16)^{10}}$ $= \frac{-10x}{(x^2 + 16)^6}$
22	$f(x) = (x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{4}}$ $f'(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5x + 2)^{-\frac{3}{4}}(2x - 5)$ $= \frac{2x - 5}{4\sqrt[4]{(x^2 - 5x + 2)^3}}$
23	$f'(x) = -40(8x^2 - 6)^{-41}(16x)$ $= -640x(8x^2 - 6)^{-41}$
24	$f'(x) = \frac{-1 \times 2}{(3 + 2x)^2} = \frac{-2}{(3 + 2x)^2}$
25	$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(3x^2) - (x^3)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$ $= \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$
26	$f'(x) = (2x - 8)^2(6x) + (3x^2 - 4)(2)(2x - 8)^1(2)$ $= (2x - 8)(6x(2x - 8) + 4(3x^2 - 4))$ $= (2x - 8)(24x^2 - 48x - 16)$
27	$f'(x) = x^5(6x + 4) + (3x^2 + 4x - 7)(5x^4)$ $= 6x^6 + 4x^5 + 15x^6 + 20x^5 - 35x^4$ $= 21x^6 + 24x^5 - 35x^4$ حل آخر: $f(x) = 3x^7 + 4x^6 - 7x^5$ $f'(x) = 21x^6 + 24x^5 - 35x^4$ بفك الأقواس:



28	$f'(x) = (x^3)(4)(2x+6)^3(2) + (2x+6)^4(3x^2)$ $= 2x^2(2x+6)^3(7x+9)$
29	$f'(x) = 3(e^{-x} + e^x)^2(-e^{-x} + e^x)$
30	$f'(x) = (2x^3)(-e^{-x}) + (e^{-x})(6x^2)$ $= -2x^3e^{-x} + 6x^2e^{-x}$
31	$f'(x) = \frac{(x+1)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+1)^2}$ $= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$
32	$f'(x) = 5 \times \frac{5}{5x-4} = \frac{25}{5x-4}$
33	$f'(x) = \frac{e^x}{e^x} = 1$
34	$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x-1}$
35	$f'(x) = (x^5)(3 \cos 3x) + (\sin 3x)(5x^4)$ $= 3x^5 \cos 3x + 5x^4 \sin 3x$
36	$f(x) = (\cos x)^2 + \sin x$ $f'(x) = 2(\cos x)^1(-\sin x) + \cos x$ $= -2 \cos x \sin x + \cos x$
37	$f'(x) = \frac{(x) \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \right) - (\sqrt{\cos x})(1)}{x^2} = \frac{-\sin x}{2x\sqrt{\cos x}} - \frac{\sqrt{\cos x}}{x^2}$
38	$f'(x) = (\sin 5x) \left(\frac{-\sin x}{\cos x} \right) + (\ln(\cos x))(5 \cos 5x)$
39	$f'(x) = \frac{\frac{-1 \times 2x}{(x^2+9)^2}}{\frac{1}{x^2+9}} = \frac{-1 \times 2x}{(x^2+9)^2} \times \frac{x^2+9}{1} = \frac{-2x}{x^2+9}$
40	$f'(x) = (e^{2x})(2 \cos 2x) + (\sin 2x)(2e^{2x}) = 2e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$



41	$N'(t) = 1000 \left(\frac{3 \times 2t}{(t^2 + 50)^2} \right) = \frac{6000t}{(t^2 + 50)^2}$
42	$N'(1) = \frac{6000}{(1 + 50)^2} \approx 2.3$
43	$P'(t) = \frac{-2000 \times 4}{(4t + 80)^2} = \frac{-8000}{(4t + 80)^2}$
44	$P'(10) = \frac{-8000}{(40 + 80)^2} \approx -0.56$ يتناقص عدد الغزلان بمعدل 0.56 غزال كل شهر بعد 10 أشهر من الآن
45	$P'(t) = \frac{-700 \times 2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-1400t}{(t^2 + 1)^2}$
46	$P'(3) = \frac{-1400 \times 3}{(9 + 1)^2} = -42$ يتناقص عدد السكان بمعدل 42 ألف شخص لكل سنة بعد 3 سنوات.



إجابات كتاب الطالب - مادة الرياضيات - الصف الثاني الثانوي الأدبي ف1

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل

الدرس الأول: المماس والعمودي على المماس

مسألة اليوم صفحة 92

1	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$	ميل المنحنى عند النقطة (1,1) هو:
2	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$	
3	نلاحظ أن ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة (1, 1) وميل المستقيم L متساويان، أي أن ميل المنحنى عند أي نقطة عليه يساوي ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.	
تحقق من فهمي صفحة 93		
	$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $f'(3) = 27 - 18 + 2 = 11$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$ $y - 5 = 11(x - 3)$ $y - 5 = 11x - 33$ $y = 11x - 28$	معادلة المماس: بتعويض $a = 3$



أتحقق من فهمي صفحة 94

$$f(1) = \frac{2-1}{1} = 1 \rightarrow (1, 1)$$

$$f'(x) = \frac{(x)(2) - (2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

معادلة المماس:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

بتعويض $a = 1$

$$y - 1 = 1(x - 1)$$

$$y - 1 = x - 1$$

$$y = x$$

أتحقق من فهمي صفحة 96

$$f(x) = 1 - \sqrt{x}, f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$f(4) = 1 - \sqrt{4} = -1$$

نقطة التماس هي $(4, -1)$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2, f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$0 = -3x^2 + 6x$$

$$3x(-x + 2) = 0$$

$$b \quad x = 0 \text{ or } x = 2$$

$$f(0) = -2$$

$$f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$$

نقطتا التماس هما $(0, -2), (2, 2)$



أتحقق من فهمي صفحة 97

$$f(x) = \ln x^3, (1, 0)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

$$f'(1) = \frac{3}{1} = 3$$

ميل المماس هو 3 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{3}$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \quad \text{معادلة العمودي على المماس}$$

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) \quad \text{بتعويض } a = 1$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 98

$$f(x) = x^3 - 6x + 3, (2, -1), f(2) = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

$$f'(2) = 12 - 6 = 6$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$y - (-1) = 6(x - 2)$$

$$y + 1 = 6x - 12$$

$$y = 6x - 13$$

معادلة المماس:

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x} = \frac{x^4}{x} - \frac{3x^3}{x} = x^3 - 3x^2, (1, -2), f(1) = -2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(1) = 3 - 6 = -3$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - (-2) = -3(x - 1)$$

$$y + 2 = -3x + 3$$

$$y = -3x + 1$$

معادلة المماس:



3	$f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1), (1, 0), f(1) = 0$ $f'(x) = (\sqrt{x})(2x) + (x^2 - 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $f'(1) = (1)(2) + (0)\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $y - 0 = 2(x - 1)$ $y = 2x - 2$	معادلة المماس:
4	$f(x) = x + \frac{4}{x}, (-4, -5), f(-4) = -5$ $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ $f'(-4) = 1 - \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(-4) = f'(-4)(x - (-4))$ $y - (-5) = \frac{3}{4}(x + 4)$ $y + 5 = \frac{3}{4}x + 3$ $y = \frac{3}{4}x - 2$	معادلة المماس:
5	$f(x) = x + e^x, (0, 1), f(0) = 1$ $f'(x) = 1 + e^x$ $f'(0) = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ $y - 1 = 2(x - 0)$ $y - 1 = 2x$ $y = 2x + 1$	معادلة المماس:



$$f(x) = \ln(x + e), (0, 1), f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x + e}$$

$$f'(0) = \frac{1}{0 + e} = \frac{1}{e}$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

6

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - 0)$$

$$y - 1 = \frac{1}{e}x$$

$$y = \frac{1}{e}x + 1$$

معادلة المماس:

$$f(x) = \sqrt{x - 7}, x = 16$$

$$f(16) = \sqrt{16 - 7} = 3 \rightarrow (16, 3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 7}}$$

$$f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16 - 7}} = \frac{1}{6}$$

7

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - f(16) = f'(16)(x - 16)$$

$$y - 3 = \frac{1}{6}(x - 16)$$

$$y - 3 = \frac{1}{6}x - \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$$

معادلة المماس:



8

$$f(x) = (x-1)e^x, x=1$$

$$f(1) = (1-1)e^1 = 0 \rightarrow (1, 0)$$

$$f'(x) = (x-1)e^x + e^x(1) = xe^x$$

$$f'(1) = 1e^1 = e$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 0 = e(x - 1)$$

$$y = ex - e$$

معادلة المماس:

9

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}, x=4$$

$$f(4) = \frac{4+3}{4-3} = 7 \rightarrow (4, 7)$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)(1) - (x+3)(1)}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-6}{(4-3)^2} = -6$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4)$$

$$y - 7 = -6(x - 4)$$

$$y - 7 = -6x + 24$$

$$y = -6x + 31$$

معادلة المماس:



$$f(x) = (\ln x)^2, x = e$$

$$f(e) = (\ln e)^2 = 1 \rightarrow (e, 1)$$

$$f'(x) = 2(\ln x) \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$f'(e) = 2(\ln e) \left(\frac{1}{e} \right) = \frac{2}{e}$$

10 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

معادلة المماس:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e)$$

$$y - 1 = \frac{2}{e}(x - e)$$

$$y - 1 = \frac{2}{e}x + 2$$

$$y = \frac{2}{e}x + 3$$

$$f(x) = (3x + 10)^2, (-3, 1)$$

$$f'(x) = 2(3x + 10)^1(3) = 6(3x + 10)$$

$$f'(-3) = 6(-9 + 10) = 6$$

ميل المماس هو 6 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{6}$

11 $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - f(-3) = -\frac{1}{f'(-3)}(x - (-3))$$

$$y - 1 = -\frac{1}{6}(x + 3)$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$$



12	$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}, (4, 1)$ $f'(x) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$ $f'(4) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8+1} = -\frac{1}{9}$ ميل المماس هو $-\frac{1}{9}$ إذن ميل العمودي على المماس هو 9 معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - f(4) = 9(x - 4)$ $y - 1 = 9(x - 4)$ $y = 9x - 35$
13	نلاحظ من الرسم أن المنحنى يقطع المحور x في النقطة $(-4, 0)$ أي أن $f(-4) = 0$ $f'(x) = \frac{1}{x+5}$ $f'(-4) = \frac{1}{-4+5} = 1$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - f(-4) = -\frac{1}{f'(-4)}(x - (-4))$ $y - 0 = -\frac{1}{1}(x + 4)$ $y = -x - 4$



عند تقاطع المنحنى مع المحور y يكون $x=0$

$$y = \ln(0 + 5) = \ln 5$$

ويكون

نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, \ln 5)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$14 \quad f'(0) = \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5}$$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0)$$

$$y - \ln 5 = -5(x - 0)$$

$$y = -5x + \ln 5$$

$$f(x) = 4e^{2x+1}$$

$$f(-1) = 4e^{-2+1} = \frac{4}{e} \rightarrow \left(-1, \frac{4}{e}\right)$$

$$f'(x) = 8e^{2x+1}$$

$$f'(-1) = 8e^{-2+1} = \frac{8}{e}$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

معادلة المماس:

$$15 \quad y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$$

$$y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}(x + 1)$$

$$y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}x + \frac{8}{e}$$

$$y = \frac{8}{e}x + \frac{12}{e}$$



16	$y = 4e^{2(0)+1} = 4e \rightarrow (0, 4e)$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, 4e)$ $f'(x) = 8e^{2x+1}$ $f'(0) = 8e^{0+1} = 8e$ $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0)$ $y - 4e = -\frac{1}{8e}(x)$ $y = -\frac{1}{8e}x + 4e$
17	$f(x) = x^2 - x - 12$ $f'(x) = 2x - 1$ $3 = 2x - 1$ $4 = 2x$ $x = 2$ $f(2) = 4 - 2 - 12 = -10$ النقطة هي $(2, -10)$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ $y - (-10) = 3(x - 2)$ $y + 10 = 3x - 6$ $y = 3x - 16$
18	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$ $0 = 3x^2 - 8x$ $x(3x - 8) = 0$ $x = 0 \text{ or } 3x - 8 = 0 \rightarrow 3x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{3}$ $f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 4 = -4$ $f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = -\frac{364}{27}$ النقاط هي $(0, -4), \left(2, -\frac{364}{27}\right)$



19	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = \frac{(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}} \right) - \sqrt{2x-1}(1)}{2x-1}$ $0 = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}} \right) - \sqrt{2x-1}}{2x-1}$ $\left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}} \right) - \sqrt{2x-1} = 0$ $\frac{x}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1}$ $x = 2x - 1$ $x = 1$ $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$ النقطة هي $(1, 1)$
20	ميل مماس المنحنى يساوي 1 أي $f'(x) = 1$ $f'(x) = 10x - 49$ $1 = 10x - 49$ $10x = 50$ $x = 5$ $f(5) = 5(5)^2 - 49(5) + 12 = 125 - 245 + 12 = -108$ النقطة هي $(5, -108)$
21	معادلة المماس: $f'(x) = 6 - 2x$ $f'(1) = 6 - 2 = 4$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $y - 5 = 4(x - 1)$ $y - 5 = 4x - 4$ $y = 4x + 1$



22	$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$ $y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ $y - 5 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$ معادلة العمودي على المماس:
23	$f'(x) = -2x$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$ $y - 5 = 2(x + 1)$ $y - 5 = 2x + 2$ $y = 2x + 7$ معادلة المماس عند النقطة $(-1, 5)$: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $y - 5 = -2(x - 1)$ $y - 5 = -2x + 2$ $y = -2x + 7$ معادلة المماس عند النقطة $(1, 5)$:
24	$2x + 7 = -2x + 7$ $4x = 0$ $x = 0$ $y = -2(0) + 7 = 7$ نقطة تقاطع المماسين هي: $(0, 7)$



25	$f(x) = \sqrt{x}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(1) = \frac{1}{2}$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ $y - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	معادلة المماس عند النقطة $(1, 1)$:
26	$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$ $y - 1 = -2(x - 1)$ $y - 1 = -2x + 2$ $y = -2x + 3$	معادلة العمودي على المماس:
27	$f(x) = \sqrt{x} - 1$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2$ $4\sqrt{x} = 1$ $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{16}$ $f\left(\frac{1}{16}\right) = \sqrt{\frac{1}{16}} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$	ميل المستقيم $y = 2x - 1$ هو 2، والمماس يوازيه فميله أيضًا هو 2، إذن: النقطة هي $\left(\frac{1}{16}, -\frac{3}{4}\right)$



الدرس الثاني: المشتقة الثانية، والسرعة المتجهة، والتسارع

مسألة اليوم صفحة 100

$$v(t) = t + 15$$

$$t + 15 = 15 \rightarrow t = 0 \text{ s}$$

أتحقق من فهمي صفحة 101

a

$$f'(x) = 4x^3 - 6x - \sin x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6 - \cos x$$

b

$$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$$

$$f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

$$f''(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$

أتحقق من فهمي صفحة 103

a

$$v(t) = 6t - 3t^2$$

$$v(3) = 6(3) - 3(3)^2 = 18 - 27 = -9 \text{ m/s}$$

b

بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب (إلى اليسار)
عندما $t = 3$

c

$$a(t) = 6 - 6t$$

$$a(3) = 6 - 6(3) = -12 \text{ m/s}^2$$

d

$$6t - 3t^2 = 0$$

$$3t(2 - t) = 0$$

$$t = 0 \text{ or } t = 2$$

يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0

أتحقق من فهمي صفحة 104

a

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0 \text{ m/s}$$

b

$$a(t) = 6t - 12$$

$$a(3) = 6(3) - 12 = 6 \text{ m/s}^2$$



c	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $3t^2 - 12t + 9 = 0$ $(3t - 3)(t - 3) = 0$ $t = 1 \text{ or } t = 3$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 104	
1	$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$ $f''(x) = 18x - 8$
2	$f'(x) = 2e^x + 2x$ $f''(x) = 2e^x + 2$
3	$f'(x) = -2 \sin x - 3x^2$ $f''(x) = -2 \cos x - 6x$
4	$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right) - 9x^2 = \frac{4}{x} - 9x^2$ $f''(x) = -\frac{4}{x^2} - 18x$
5	$f'(x) = (x^3)(6)(x+6)^5(1) + (x+6)^6(3x^2)$ $= (x+6)^5(9x^3 + 18x^2)$ $f''(x) = (5)(x+6)^4(1)(9x^3 + 18x^2) + (x+6)^5(27x^2 + 36x)$ $= (x+6)^4(72x^3 + 288x^2 + 216x)$
6	$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6)$ $= x^6 + (\ln x)(7x^6)$ $f''(x) = 6x^5 + (\ln x)(42x^5) + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)$ $= 13x^5 + (\ln x)(42x^5)$
7	$f'(x) = \frac{(x+2)(1) - (x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$ $f''(x) = \frac{-2 \times 2(x+2)(1)}{(x+2)^4} = \frac{-4(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-4}{(x+2)^3}$
8	$f'(x) = 2x \cos x^2$ $f''(x) = (2x)(-2x \sin x^2) + (\cos x^2)(2) = -4x^2 \sin x^2 + 2 \cos x^2$
9	$f'(x) = -6x^{-4}$ $f''(x) = 24x^{-5}$



10	$f(x) = x^3 - \frac{5}{x} = x^3 - 5x^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 + 5x^{-2}$ $f''(x) = 6x - 10x^{-3}$
11	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
12	$f'(x) = -4 + 2x - 3x^2$ $f''(x) = 2 - 6x$
13	$f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x} = 8x^3 - 3x + 4x^{-1}$ $f'(x) = 24x^2 - 3 - 4x^{-2}$ $f''(x) = 48x + 8x^{-3}$ $f''(-2) = 48(-2) + 8(-2)^{-3} = -96 - 1 = -97$
14	$f'(x) = \frac{-2}{(2x-4)^2}$ $f''(x) = \frac{2 \times 2 \times (2x-4)^1 \times 2}{(2x-4)^4} = \frac{8}{(2x-4)^3}$ $f''(3) = \frac{8}{(2(3)-4)^3} = \frac{8}{8} = 1$
15	$f'(x) = 3px^2 - 6px + 1$ $f''(x) = 6px - 6p$ $f''(2) = 6p(2) - 6p$ $-1 = 12p - 6p$ $6p = -1$ $p = -\frac{1}{6}$
16	$v(t) = 5t^4 - 40t$ $v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285 \text{ m/s}$
17	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 3$



18	$a(t) = 20t^3 - 40$ $a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500 \text{ m/s}^2$
19	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $5t^4 - 40t = 0$ $5t(t^3 - 8) = 0$ $t = 0 \text{ or } t = 2$
20	$s(t) = \frac{3t}{1+t}$ $v(t) = \frac{(1+t)(3) - (3t)(1)}{(1+t)^2} = \frac{3}{(1+t)^2}$ $v(4) = \frac{3}{(1+4)^2} = \frac{3}{25} = 0.12 \text{ m/s}$
21	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 4$
22	$a(t) = \frac{-3 \times 2(1+t)(1)}{(1+t)^4} = \frac{-6}{(1+t)^3}$ $a(4) = \frac{-6}{(1+4)^3} = \frac{-6}{125} = -0.048 \text{ m/s}^2$
23	$v(t) = 2t - 8$ $v(6) = 2(6) - 8 = 4 \text{ m/s}$
24	$a(t) = 2$ $a(6) = 2 \text{ m/s}^2$
25	يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $2t - 8 = 0 \rightarrow t = 4$



26	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(5 - 3x^2)^6(1) - (x)(6)(5 - 3x^2)^5(-6x)}{(5 - 3x^2)^{12}}$ $= \frac{(5 - 3x^2)^5(5 - 3x^2 + 36x^2)}{(5 - 3x^2)^{12}}$ $= \frac{5 + 33x^2}{(5 - 3x^2)^7}$
27	$v(t) = 3t^2 - 12$ $a(t) = 6t$ $a(t) = 0 \rightarrow 6t = 0 \rightarrow t = 0$ $v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \text{ m/s}$
28	$v(t) = 6t^2 - 24$ $a(t) = 12t$ $v(t) = 0 \rightarrow 6t^2 - 24 = 0 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t = 2$ $a(2) = 12(2) = 24 \text{ m/s}^2$



الدرس الثالث: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم صفحة 106

$$S = 4xy + x^2$$

$$V = x^2y$$

$$0.2 = x^2y \rightarrow y = \frac{0.2}{x^2}$$

$$S = 4xy + x^2$$

$$S(x) = 4x \left(\frac{0.2}{x^2} \right) + x^2 = \frac{0.8}{x} + x^2$$

$$S'(x) = \frac{-0.8}{x^2} + 2x$$

$$\frac{-0.8}{x^2} + 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{0.8}{x^2} \rightarrow 2x^3 = 0.8 \rightarrow x^3 = 0.4 \rightarrow x = \sqrt[3]{0.4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{0.4}$

$$S''(x) = \frac{1.6}{x^3} + 2$$

$$S''(\sqrt[3]{0.4}) = \frac{1.2}{(\sqrt[3]{0.4})^3} + 2 = 5 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{0.4}$ ،

وتكون أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{0.4} \text{ m} , \quad y = \frac{0.2}{(\sqrt[3]{0.4})^2} \text{ m}$$



أتحقق من فهمي صفحة 108

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$(3x + 2)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad \text{or} \quad x = 2$$

القيم الحرجة هي: $x = -\frac{2}{3}$ و $x = 2$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0$$

$$f''(2) = 6(2) - 4 = 8 > 0$$

توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -\frac{2}{3}$ وهي $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{175}{27}$

توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 8 - 2(4) - 4(2) + 5 = -3$

أتحقق من فهمي صفحة 110

$$A = xy$$

$$P = 2x + 2y$$

$$54 = 2x + 2y$$

$$27 = x + y \rightarrow y = 27 - x$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x(27 - x)$$

$$= 27x - x^2$$

$$A'(x) = 27 - 2x$$

$$27 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{27}{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \frac{27}{2}$

$$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{27}{2}$ ، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:

$$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25 \text{ m}^2$$

مساحة المستطيل

محيط المستطيل



أتحقق من فهمي صفحة 111

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$V = x^2h$$

المساحة الكلية لسطح الخزان

حجم الخزان

$$2 = x^2h \rightarrow h = \frac{2}{x^2}$$

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) + 2x^2 = \frac{8}{x} + 2x^2$$

$$S'(x) = \frac{-8}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-8}{x^2} + 4x = 0 \rightarrow 4x = \frac{8}{x^2} \rightarrow 4x^3 = 8 \rightarrow x^3 = 2 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2}$

$$S''(x) = \frac{16}{x^3} + 4$$

$$S''(\sqrt[3]{2}) = \frac{16}{(\sqrt[3]{2})^3} + 4 = 12 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{2}$ ،

وتكون أبعاد الخزان التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt[3]{2} \text{ m}, \quad w = x = \sqrt[3]{2} \text{ m}, \quad h = \frac{2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \sqrt[3]{2} \text{ m}$$



أتحقق من فهمي صفحة 113

$$V = x^2 h$$

$$A = 4xh + x^2$$

حجم الخزان

مساحة سطح الخزان المفتوح من الأعلى

$$54 = 4xh + x^2 \rightarrow 4xh = 54 - x^2 \rightarrow h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 h$$

$$V(x) = x^2 \left(\frac{54 - x^2}{4x} \right)$$

$$= \frac{54x - x^3}{4}$$

$$= \frac{54}{4}x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0 \rightarrow 54 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{54}{3} = 18 \rightarrow x = \pm\sqrt{18}$$

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt{18}$

$$V''(x) = -\frac{3}{2}x$$

$$V''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

إنّ توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{18}$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt{18} \text{ m}, \quad w = x = \sqrt{18} \text{ m}, \quad h = \frac{54 - 18}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}} \text{ m}$$



أتحقق من فهمي صفحة 115

$$R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$$

$$C(x) = 2250 + 18x$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x$$

$$= 1732x - 2x^2 - 2250$$

$$P'(x) = 1732 - 4x$$

$$1732 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{1732}{4} = 433$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 433$

$$P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 433$
ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ثلاثة.

اقتران الإيراد

اقتران التكلفة

اقتران الربح

أتدرب وأحل المسائل صفحة 116

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$\rightarrow 2x = 2$$

$$\rightarrow x = 1$$

القيمة الحرجة هي: $x = 1$

$$f''(x) = 2$$

$$f''(1) = 2 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

$$f'(x) = 15 - 2x - x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15 - 2x - x^2 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$$

$$\rightarrow x = -5 \text{ or } x = 3$$

القيم الحرجة هي: $x = -5$, $x = 3$

$$f''(x) = -2 - 2x$$

$$f''(-5) = -2 + 10 = 8 > 0$$

$$f''(3) = -2 - 6 = -8 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -5$ وهي:

$$f(-5) = 20 - 75 - 25 - \frac{125}{3} = -\frac{365}{3}$$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 3$ وهي: $f(3) = 20 + 45 - 9 - 9 = 47$



3	$f'(x) = 4x^3 - 4x$ $f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0$ $\rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$ $\rightarrow x = 0, x = \pm 1$ القيم الحرجة هي: $x = 0, x = 1, x = -1$ $f''(x) = 12x^2 - 4$ $f''(0) = 0 - 4 = -4 < 0$ $f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0$ $f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0$ إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = 0 - 0 - 2 = -2$ و توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ و $x = -1$ هي: $f(1) = f(-1) = 1 - 2 - 2 = -3$
4	محيط الحديقة من دون الجدار $P = AB + BC + CD$ $300 = AB + x + AB$ $300 = 2AB + x$ $300 - x = 2AB$ $AB = \frac{300 - x}{2} = 150 - \frac{1}{2}x$
5	مساحة الحديقة المستطيلة $A = BC \times AB$ $A(x) = x \times \left(150 - \frac{1}{2}x\right)$ $= 150x - \frac{1}{2}x^2$
6	توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 150$ $A'(x) = 150 - x$ $150 - x = 0$ $x = 150$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 150$ ، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن هما: $BC = x = 150 \text{ m}$, $AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75 \text{ m}$



7	$V = lwh$ $V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x, \quad 0 \leq x \leq 15$ $= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$ $= (1440 - 156x + 4x^2)x$ $= 1440x - 156x^2 + 4x^3$	حجم العتبة
8	$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$ $12x^2 - 312x + 1440 = 0$ $x^2 - 26x + 120 = 0$ $(x - 20)(x - 6) = 0$ $x = 20 \quad \text{or} \quad x = 6$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 6$ والقيمة $x = 20$ خارج مجال اقتران الحجم. إذ يستحيل قص مربعات طول ضلع كل منها 20 cm من زوايا الورقة التي عرضها 30 cm $V''(x) = -312 + 24x$ $V''(6) = -312 + 24(6) = -312 + 144 = -168 < 0 \rightarrow$ قيمة عظمى إذن يكون حجم العتبة أكبر ما يمكن عندما $x = 6$	
9	$p(x) = 500 - 0.002x$ $R(x) = (500 - 0.002x)x = 500x - 0.002x^2$	سعر المنتج الواحد هو اقتران الإيراد
10	$P(x) = R(x) - C(x)$ $= (500x - 0.002x^2) - (300 + 1.10x)$ $= 500x - 0.002x^2 - 300 - 1.10x$ $= 498.9x - 0.002x^2 - 300$	اقتران الربح



$$P'(x) = 498.9 - 0.004x$$

$$498.9 - 0.004x = 0$$

$$498.9 = 0.004x$$

$$x = \frac{498.9}{0.004} = \frac{498900}{4} = 124725$$

11 $P''(x) = -0.004$

$$P''(124725) = -0.004 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 124725$ ، فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن

هو 124725 قطعة

أكبر ربح ممكن هو:

$$P(124725) = 498.9(124725) - 0.002(124725)^2 - 300 = 31112351.25$$

سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن

12 $p(124725) = 500 - 0.002(124725)$

$$= 250.55$$



حجم المنشور الثلاثي القائم = مساحة القاعدة المثلثة $\times$ ارتفاع المنشور
مساحة المثلث = نصف طول القاعدة المثلث $\times$ ارتفاع المثلث

$$A_1 = \frac{1}{2}x(x) = \frac{1}{2}x^2$$

مساحة المثلث:

$$V = \frac{1}{2}x^2 l$$

حجم المنشور:

$$1000 = \frac{1}{2}x^2 l$$

$$2000 = x^2 l$$

$$l = \frac{2000}{x^2}$$

مساحة سطح القالب = مساحتي القاعدتين المثلثيتين + مساحتي الوجهين اللذين إحدى حافيتيهما ضلع القائمة x

$$A = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2(xl) = x^2 + 2xl$$

$$A(x) = x^2 + 2x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$
$$= x^2 + \frac{4000}{x}$$

$$13 \quad A'(x) = 2x - \frac{4000}{x^2}$$

$$2x - \frac{4000}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{4000}{x^2}$$

$$2x^3 = 4000$$

$$x^3 = 2000$$

$$x = \sqrt[3]{2000}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2000}$

$$A''(x) = 2 + \frac{8000}{x^3}$$

$$A''(x) = 1 + \frac{8000}{(\sqrt[3]{2000})^3} = 1 + \frac{8000}{2000} = 5 > 0$$

توجد قيمة صغرى عندما $x = \sqrt[3]{2000}$

إذن أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{2000} \text{ cm}, \quad l = \frac{2000}{x^2} = \frac{2000}{(\sqrt[3]{2000})^2} = \sqrt[3]{2000} \text{ cm}$$



الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني والمعدلات المرتبطة

مسألة اليوم صفحة 117

$$\frac{dV}{dt} = 0.5$$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{r=1}$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi (1)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi} \approx 0.16$$

معدل التغير المعطى:

معدل التغير المطلوب:

العلاقة التي تربط بين حجم الخزان وارتفاعه:

إن يزداد ارتفاع الوقود في الخزان بمعدل 0.16 m/min تقريباً

أتحقق من فهمي صفحة 119

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$10y \frac{dy}{dx} - 2e^x = 4 \frac{dy}{dx}$$

$$10y \frac{dy}{dx} - 4 \frac{dy}{dx} = 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} (10y - 4) = 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{10y - 4}$$



$$(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(1) + 2y \frac{dy}{dx} = -4 \sin x$$

$$(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + 2y \frac{dy}{dx} = -4 \sin x - y$$

c

$$\frac{dy}{dx} (x + 2y) = -4 \sin x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 4 \sin x}{x + 2y}$$

أتحقق من فهمي صفحة 120

$$x^3 + 2y^3 = 6, (2, -1)$$

$$3x^2 + 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3(2)^2 + 6(-1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$12 + 6 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{6} = -2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -2(x - 2)$$

$$y + 1 = -2x + 4$$

$$y = -2x + 3$$

بتعويض $(x, y) = (2, -1)$

ميل المماس لمنحني العلاقة عند النقطة $(2, -1)$ هو -2
معادلة المماس:



أتحقق من فهمي صفحة 121

$$\frac{dr}{dt} = 3$$

معدل التغير المعطى:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{r=4}$$

معدل التغير المطلوب:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi(4)^2(3)$$

$$= 192\pi$$

إنّ يزداد حجم البالون بمعدل $192\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطره 4 cm

أُتدرب وأحل المسائل صفحة 121

$$2x - 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 \quad 4y \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}$$

$$2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2 \quad 3y^2 \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2}$$

$$2x + 2 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3 \quad 2 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} (2 - 2y) = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2 - 2y} = \frac{-x}{1 - y}$$



4	$2x \frac{dy}{dx} + 2y - 3 \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} - 7$ $2x \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = -7 - 2y$ $\frac{dy}{dx} (2x - 3 - 2y) = -7 - 2y$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-7 - 2y}{2x - 3 - 2y}$
5	$5y^4 \frac{dy}{dx} = 3x^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{5y^4}$
6	$(x^2) \left(3y^2 \frac{dy}{dx} \right) + (y^3)(2x) + \frac{dy}{dx} = 0$ $3x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + 2xy^3 + \frac{dy}{dx} = 0$ $3x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = -2xy^3$ $\frac{dy}{dx} (3x^2 y^2 + 1) = -2xy^3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3}{3x^2 y^2 + 1}$
7	$\sqrt{x} + \sin y = 16$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{dy}{dx} \cos y = 0$ $\frac{dy}{dx} \cos y = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x} \cos y}$
8	$(e^x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(e^x) = (x) \left(\frac{dy}{dx} e^y \right) + (e^y)(1)$ $e^x \frac{dy}{dx} - x e^y \frac{dy}{dx} = e^y - y e^x$ $\frac{dy}{dx} (e^x - x e^y) = e^y - y e^x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - y e^x}{e^x - x e^y}$



9	$\sin x + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = -\sin x$ $\frac{dy}{dx} = -y \sin x$
10	$32y \frac{dy}{dx} - 2x = 0$ $32y \frac{dy}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{32y} = \frac{x}{16y}$
11	$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 4 + 6 \frac{dy}{dx} = 0$ $2y \frac{dy}{dx} + 6 \frac{dy}{dx} = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx} (2y + 6) = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{2y + 6}$
12	$9x^2 - 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $9(2)^2 - 2(4) \frac{dy}{dx} = 0$ $36 - 8 \frac{dy}{dx} = 0$ $8 \frac{dy}{dx} = 36$ $\frac{dy}{dx} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$ بتعويض $(x, y) = (2, 4)$



13	$4x - 9y^2 \frac{dy}{dx} = 0$ $4(-2) - 9(1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$ $-8 - 9 \frac{dy}{dx} = 0$ $9 \frac{dy}{dx} = -8$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{9}$	بتعويض $(x, y) = (-2, 1)$
14	$2y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ $2(1) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e}$	بتعويض $(x, y) = (e, 1)$
15	$2(y - 3)^1 \frac{dy}{dx} = 4$ $2(1 - 3)^1 \frac{dy}{dx} = 4$ $-4 \frac{dy}{dx} = 4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-4} = -1$	بتعويض $(x, y) = (6, 1)$
16	$4x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $4(3) + 2(4) \frac{dy}{dx} = 0$ $12 + 8 \frac{dy}{dx} = 0$ $8 \frac{dy}{dx} = -12$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$	بتعويض $(x, y) = (3, 4)$ ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$ هو $-\frac{3}{2}$



17	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 3)$ $y - 4 = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$	معادلة المماس:
18	$2y \frac{dy}{dx} + (x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + y + 2x = 0$ $2(-2) \frac{dy}{dx} + (3) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (-2) + 2(3) = 0$ $-4 \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} - 2 + 6 = 0$ $-\frac{dy}{dx} = -4$ $\frac{dy}{dx} = 4$	بتعويض $(x, y) = (3, -2)$ ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$ هو 4
19	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - (-2) = 4(x - 3)$ $y + 2 = 4x - 12$ $y = 4x - 14$	معادلة المماس:
20	$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ $y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3)$ $y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$	معادلة العمودي على المماس:



21	$\frac{dx}{dt} = -6$ $\left. \frac{dV}{dt} \right _{x=30}$ $V = x^3$ $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$ $= 3(30)^2(-6)$ $= -16200$	معدل التغير المعطى: معدل التغير المطلوب: العلاقة التي تربط بين حجم المكعب وطول ضلعه: إذن يتناقص حجم المكعب بمعدل $16200 \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول ضلعه 30 cm
22	$\frac{dr}{dt} = 0.5$ $\left. \frac{dA}{dt} \right _{r=3}$ $A = 4\pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$ $= 8\pi(3)(0.5)$ $= 12\pi$	معدل التغير المعطى: معدل التغير المطلوب: العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها: إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل $12\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطرها 3 cm
23	$\frac{dr}{dt} = 0.13$ $\left. \frac{dV}{dt} \right _{r=0.45}$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $= 4\pi(0.45)^2(0.13)$ $= 0.1053\pi$	معدل التغير المعطى: معدل التغير المطلوب: العلاقة التي تربط بين حجم الورم ونصف قطره: إذن يزداد حجم الورم بمعدل $0.1053\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطره 0.13 cm



$$x^2 + 6y^2 = 10$$

$$(2)^2 + 6y^2 = 10 \rightarrow 6y^2 = 6 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

$$2x + 12y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y}$$

عند النقطة (2, 1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

24

$$y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

عند النقطة (2, -1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y + 1 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$



$$\ln(xy) = x^2 + y^2$$

$$\frac{(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(1)}{xy} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$$

$$(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(1) = 2x^2y + 2xy^2 \frac{dy}{dx}$$

$$25 \quad x \frac{dy}{dx} + y = 2x^2y + 2xy^2 \frac{dy}{dx}$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2xy^2 \frac{dy}{dx} = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx} (x - 2xy^2) = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{w=64}$$

معدل التغير المطلوب

العلاقة التي تربط u مع w هي:

$$u = 150 \sqrt[3]{w^2}$$

$$u = 150w^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{du}{dt} = 150 \times \frac{2}{3} w^{-\frac{1}{3}} \frac{dw}{dt}$$

26

$$\frac{dw}{dt} = 0.05 \quad \text{لكن } w = 0.05t + 8 \quad \text{إذن:}$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{w=64} = 150 \times \frac{2}{3} (64)^{-\frac{1}{3}} (0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3} \frac{1}{(64)^{\frac{1}{3}}} (0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} (0.05) = 1.25$$



اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	c
2	d
3	c
4	d
5	a
6	d
7	c
8	$f(x) = x^2 - 7x + 10$ (2,0) $f'(x) = 2x - 7$ $f'(2) = 4 - 7 = -3$ $y - 0 = -3(x - 2)$ $y = -3x + 6$ معادلة المماس:
9	$f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}$ (4,12) $f'(x) = 2x + \frac{8\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = 2x + \frac{4}{x\sqrt{x}}$ $f'(4) = 2(4) + \frac{4}{4\sqrt{4}} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ $y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$ $y - 12 = \frac{17}{2}x - 34$ $y = \frac{17}{2}x - 22$ معادلة المماس:



10	$f(x) = \frac{2x-1}{x} \quad (1,1)$ $f'(x) = \frac{(x)(2) - (2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ $y - 1 = 1(x - 1)$ $y - 1 = x - 1$ $y = x$	معادلة المماس:
11	$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}} \quad (4,1)$ $f'(x) = \frac{-3\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)}{2x+1} = \frac{-3}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$ $f'(4) = \frac{-3}{(8+1)\sqrt{8+1}} = -\frac{1}{9}$ $y - 1 = -\frac{1}{9}(x - 4)$ $y - 1 = -\frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$ $y = -\frac{1}{9}x + \frac{13}{9}$	معادلة المماس:
12	$f(x) = (x-7)(x+4), x = 1$ $f(1) = (1-7)(1+4) = -30 \rightarrow (1, -30)$ $f'(x) = (x-7)(1) + (x+4)(1)$ $f'(1) = (1-7) + (1+4) = -1$ $y - (-30) = -1(x - 1)$ $y + 30 = -x + 1$ $y = -x - 29$	معادلة المماس:



13	$f(x) = \frac{x}{x+4}, x = -5$ $f(-5) = \frac{-5}{-5+4} = 5 \rightarrow (-5, 5)$ $f'(x) = \frac{(x+4)(1) - (x)(1)}{(x+4)^2} = \frac{4}{(x+4)^2}$ $f'(-5) = \frac{4}{(-5+4)^2} = 4$ $y - 5 = 4(x + 5)$ $y - 5 = 4x + 20$ $y = 4x + 25$	معادلة المماس:
14	$f(x) = 2x^4 + 9x^3 + x, x = -2 \quad (-2, -42)$ $f(-2) = 2(-2)^4 + 9(-2)^3 + (-2) = -42$ $f'(x) = 8x^3 + 27x^2 + 1$ $f'(-2) = 8(-2)^3 + 27(-2)^2 + 1 = 45$ $y - (-42) = 45(x + 2)$ $y + 42 = 45x + 90$ $y = 45x + 48$	معادلة المماس:
15	$f(x) = 7x^3 + 6x - 5, x = 2$ $f(2) = 7(2)^3 + 6(2) - 5 = 63$ $f'(x) = 21x^2 + 6$ $f'(2) = 21(2)^2 + 6 = 90$ $y - 63 = -\frac{1}{90}(x - 2)$ $y - 63 = -\frac{1}{90}x + \frac{1}{45}$ $y = -\frac{1}{90}x + \frac{2836}{45}$	معادلة العمودي على المماس



$$f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4x^4} = \frac{3}{2}x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-1}, \quad x = -2$$

$$f(-2) = \frac{3}{2}(-2)^{-2} - \frac{1}{4}(-2)^{-1} = \frac{3}{2 \times (-2)^2} - \frac{1}{4 \times (-2)^1} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -3x^{-3} + \frac{1}{4}x^{-2}$$

$$f'(-2) = \frac{-3}{(-2)^3} + \frac{1}{4 \times (-2)^2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

$$16 \quad y - \frac{1}{2} = -\frac{16}{7}(x + 2)$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{16}{7}x - \frac{32}{7}$$

$$y = -\frac{16}{7}x - \frac{32}{7} + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{16}{7}x - \frac{57}{14}$$

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$$

$$4x^3 - 9x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 9) = 0$$

$$17 \quad x = 0 \text{ or } 4x - 9 = 0 \rightarrow 4x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$f(0) = (0)^4 - 3(0)^3 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^4 - 3\left(\frac{9}{4}\right)^3 + 1 = -\frac{1931}{256}$$

النقاط هي $(0, 1), \left(2, -\frac{1931}{256}\right)$

ميل مماس المنحنى 12 أي $f'(x) = 12$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$3x^2 = 12$$

$$18 \quad x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \text{ or } x = -2$$

$$f(2) = (2)^3 - 3 = 5$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3 = -11$$

النقاط هي $(2, 5), (-2, -11)$



19	$f'(x) = 8x - 5$ $f''(x) = 8$
20	$f'(x) = \frac{1}{x} - 9e^x$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 9e^x$
21	$f'(x) = 10 - \left((2x) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) + (\sqrt{x})(2) \right)$ $= 10 - (\sqrt{x} + 2\sqrt{x})$ $= 10 - 3\sqrt{x}$ $f''(x) = -3 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$
22	$f(x) = \sqrt{x}(x+2) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ $f''(2) = \frac{3}{4}(2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2)^{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
23	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2, x = 1$ $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x$ $f''(x) = 24x^2 - 18x - 2$ $f''(1) = 24 - 18 - 2 = 4$



24	$\frac{dA}{dt} = 50$ $\left. \frac{dr}{dt} \right _{r=20}$ $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ $50 = 2\pi(20) \frac{dr}{dt}$ $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{4\pi}$ معدل التغير المعطى: معدل التغير المطلوب العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة ونصف قطرها: إذن يزداد طول نصف قطر البقعة بمعدل $\frac{5}{4\pi}$ m/min عندما يكون طول نصف قطرها 20 m
25	$v(t) = 3t^2 - 12t + 12$ $v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 12 = 0$ m/s
26	بما أن السرعة المتجهة صفر، إذن الجسم في حالة سكون لحظي.
27	$a(t) = 6t - 12$ $a(2) = 12 - 12 = 0$ m/s²
28	يكون الجسم في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرًا $3t^2 - 12t + 12 = 0$ $t^2 - 4t + 4 = 0$ $(t - 2)(t - 2) = 0$ $t = 2$
29	$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$ $v(3) = \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 8$ m/s
30	$a(t) = t + 1$ $a(3) = 3 + 1 = 4$ m/s²
31	يكون الشخص في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرًا $\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{2}(t + 1)^2$ لكن السرعة هنا هي $\frac{1}{2}(t + 1)^2$ وهذا مقدار موجب لجميع قيم $t \geq 0$، ولا يمكن أن يكون صفرًا، فلا يكون الشخص في حالة سكون لحظي أبدًا.



$$f'(x) = 24 - 6x^2$$

$$24 - 6x^2 = 0$$

$$6x^2 = 24 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

القيم الحرجة هي: $x = 2$ و $x = -2$

$$32 \quad f''(x) = -12x$$

$$f''(-2) = 24 > 0$$

$$f''(2) = -24 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 9 - 48 + 16 = -23$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 9 + 48 - 16 = 41$

$$f'(x) = 3(3x - 2)^2(3) - 9$$

$$= 9(3x - 2)^2 - 9$$

$$9(3x - 2)^2 - 9 = 0$$

$$(3x - 2)^2 = 1 \rightarrow 3x - 2 = \pm 1 \rightarrow x = 1 \text{ or } x = \frac{1}{3}$$

القيمة الحرجة هي: $x = 1, x = \frac{1}{3}$

$$33 \quad f''(x) = 18(3x - 2)^1(3) = 54(3x - 2)$$

$$f''(1) = 54 > 0$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -54 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = (3 - 2)^3 - 9 = -8$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{1}{3}$ وهي $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3\left(\frac{1}{3}\right) - 2\right)^3 - 9\left(\frac{1}{3}\right) = -4$



$$f(x) = 4x^5 - 10x^2$$

$$f'(x) = 20x^4 - 20x$$

$$20x^4 - 20x = 0$$

$$20x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ or } x = 1$$

القيم الحرجة هي: $x = 0$ و $x = 1$

34

$$f''(x) = 80x^3 - 20$$

$$f''(0) = -20 < 0$$

$$f''(1) = 60 > 0$$

إن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = -6$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

$$\frac{dV}{dt} = 800$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=60}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

معدل التغير المعطى:

معدل التغير المطلوب

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره:

35

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$800 = 2\pi(60)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{800}{7200\pi} = \frac{1}{9\pi}$$

إن يزداد طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{1}{9\pi}$ cm/s عندما يكون طول نصف قطره 60 cm



طول السياج
مساحة الحظيرة المستطيلة

$$P = x + 2y$$
$$A = xy$$

$$245000 = xy \rightarrow y = \frac{245000}{x}$$

$$P = x + 2y$$

$$P(x) = x + 2\left(\frac{245000}{x}\right)$$
$$= x + \frac{490000}{x}$$

$$36 \quad P'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$$

$$1 - \frac{490000}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{490000}{x^2} = 1 \rightarrow x^2 = 490000 \rightarrow x = \pm 700$$

لكن الأطوال لا تكون سالبة، لذا فإن $x = 700$

$$P''(x) = \frac{980000}{x^3}$$

$$P''(700) = \frac{980000}{(700)^3} = 2 > 0$$

إن ت توجد قيمة صغرى عندما $x = 700$
وتكون أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن هي:

$$y = \frac{245000}{700} = 350 \text{ m و } x = 700 \text{ m}$$

$$37 \quad \frac{2x + 2y}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$
$$2y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} (2y - 1) = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y - 1}$$



38	$2x + 6 - 8 \frac{dy}{dx} + 10y \frac{dy}{dx} = 0$ $-8 \frac{dy}{dx} + 10y \frac{dy}{dx} = -2x - 6$ $\frac{dy}{dx} (10y - 8) = -2x - 6$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 6}{10y - 8}$	
39	$2y \frac{dy}{dx} + (x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(1) + 2x = 0$ بتعويض $(x, y) = (-4, 3)$ ينتج أن: $2(3) \frac{dy}{dx} + (-4) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (3)(1) + 2(-4) = 0$ $6 \frac{dy}{dx} - 4 \frac{dy}{dx} + 3 - 8 = 0$ $2 \frac{dy}{dx} = 5$ $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$ ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$ هو $\frac{5}{2}$	
40	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 3 = \frac{5}{2}(x - (-4))$ $y - 3 = \frac{5}{2}x + 10$ $y = \frac{5}{2}x + 13$	معادلة المماس:
41	$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$ $A'(x) = 10 - 2x$ $10 - 2x = 0 \rightarrow x = 5$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 5$ $A''(x) = -2$ $A''(5) = -2 < 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 5$ إن أكبر مساحة ممكنة هي $A(5) = 10(5) - (5)^2 = 25 \text{ cm}^2$	مساحة المستطيل



42	$V = x^2y$ $S = 8x + 4y$ $144 = 8x + 4y$ $4y = 144 - 8x$ $y = 36 - 2x$ $V(x) = x^2(36 - 2x)$ $= 36x^2 - 2x^3$	حجم الصندوق مجموع أطوال الأحرف حجم الصندوق بدلالة x
43	$V'(x) = 72x - 6x^2$ $72x - 6x^2 = 0$ $6x(12 - x) = 0$ $x = 0 \text{ or } x = 12$ $V''(x) = 72 - 12x$ $V''(0) = 72 > 0$ $V''(12) = 72 - 144 = -72 < 0$	توجد قيمتان حرجتان هما $x = 0$ و $x = 12$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$ إن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$
44	$6x^2 + 8y \frac{dy}{dx} = 0$ $6(-2)^2 + 8(-1) \frac{dy}{dx} = 0$ $24 - 8 \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = 3$	بتعويض $(x, y) = (-2, -1)$ ينتج أن:



$$3x^2 - (x^2) \left(2y \frac{dy}{dx} \right) - (y^2)(2x) = 0$$

بتعويض $(x, y) = (3, -2)$ ينتج أن:

45

$$3(3)^2 - (3)^2 \left(2(-2) \frac{dy}{dx} \right) - ((-2)^2)(2(3)) = 0$$

$$27 + 36 \frac{dy}{dx} - 24 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$$